Kramer

Elementar-Mathematik

für

Gymnasien.

Von

P. Philipp Kramer,

Prior des Benediktinerstiftes St. Stephan in Augsburg, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium und der Pädagogik am k. Lyceum daselbst.

I. Abtheilung:

Elementar-Arithmetik.

Zweite, durchgängig verbesserte und vermehrte Auflage.

Augsburg.
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1862.

Elementar = Arithmetik

für

Gymnasien.

Von

P. Philipp Kramer,

Prior des Benediktinerstiftes St. Stephan in Augsburg, Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium und der Pädagogik am k. Lyceum daselbst.

Arithmetik und Algebra.

Zweite, durchgängig verbesserte und vermehrte Auflage.

Augsburg.

Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.

1862.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Daß ein Werk, welches für den ersten Unterricht in der Mathematik bestimmt ist, nichts Neues bieten werde, sondern nur längst Bekanntes enthalten, also nur in der Anordnung und Behandlung des Lehrstoffes sich von andern unterscheiden könne, versteht sich wohl von selbst; ich glaube jedoch, daß Sachverständige diesen Unterschied in mancher Hinsicht nicht unwesentlich finden dürften.

Daß manchem Abschnitte eine ausgedehntere, einem andern dagegen eine mehr gedrängte Behandlung zu Theil geworden ist und werden mußte, daß z. B. die Lehre von den arithmetischen Proportionen gänzlich übergangen, die von den geometrischen nur allgemein und in soweit ausführlich dargestellt wurde, als es ihre Anwendung in der Geometrie erfordert, ist dem Sachverständigen wohl leicht erklärlich. — Die höhern arithmetischen Reihen, welche gewöhnlich in den Lehrbüchern der Elementar-Algebra nicht behandelt sind, habe ich aus mehrern Gründen aufgenommen, jedoch ihre Eigenschaften nur kurz dargestellt, soweit sie für Anfänger leicht verständlich gemacht werden können. Größere Ausführlichkeit hat dagegen die allgemeine Behandlung der

Lehre über die Zinseszins- und Rentenrechnungen theils wegen ihrer Wichtigkeit für das praktische Leben erhalten, theils, weil gerade diese die zweckmäßigste Uebung im Gebrauche der Logarithmentafeln gewähren.

In Hinsicht auf die Einübung des Vorgetragenen hätte ich gewünscht, eine größere Anzahl von Beispielen aufnehmen zu können; allein einerseits fürchtete ich dadurch das Volumen des Buches zu sehr zu vergrößern und ein wesentliches Erforderniß bei einem Schulbuche „die Wohlfeilheit" zu überschreiten, andererseits hielt ich es für überflüssig, indem durch anerkannt treffliche Sammlungen zur Genüge für dieses Bedürfniß gesorgt ist. Ich nenne unter den vielen nur die bekannten Sammlungen von Meier-Hirsch, Heis, Pollack, Arndt, Salomon, die algebraischen Aufgaben von Miles Bland u. A. m.

Schlüßlich erlaube ich mir nur noch beizufügen, daß ich dem Werke, obwohl es zunächst nur für den Unterricht an Gymnasien bestimmt ist, eine solche Einrichtung gegeben zu haben glaube, daß es sich auch für den Privatunterricht, für Gewerbeschulen und für den Gebrauch solcher Leser eignen dürfte, welche der Nachhilfe eines Lehrers entbehrend durch eigenes Studium mit den Anfangsgründen der Mathematik sich bekannt machen wollen.

Augsburg, im Juli 1851.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die erste Auflage dieses Buches hat in der vorliegenden zweiten mehrere nicht unwesentliche Veränderungen, und wie ich zu hoffen wage, Verbesserungen erlitten, so daß beide Auflagen in mehrfacher Beziehung nicht neben einander bestehen können. Schon die allgemeine Einleitung erscheint in anderer Fassung, ebenso die zur Arithmetik, in welcher der größere Theil weggelassen und an geeignetem Orte eingereiht wurde.

Da in dem Buche ein streng wissenschaftlicher Gang befolgt werden sollte, so mußte der erste Abschnitt über die Grundoperationen gänzlich umgearbeitet werden; hiedurch war es aber auch nicht mehr möglich, die Uebereinstimmung der Paragraphen mit denen der ersten Auflage einzuhalten. Diese Abweichung erstreckt sich bis zu §. 194.

Die übrigen Abschnitte haben im Allgemeinen weniger wesentliche Veränderungen erfahren; nur wurden überall als zweckmäßig erscheinende Kürzungen vorgenommen, viele Beweise in der Art abgeändert und vereinfacht, daß sie mehr auf die Grundbegriffe des eben behandelten Gegen=

standes reduzirt sind, und in der Lehre von den Proportionen statt des früher gebrauchten Zeichens das fast allgemein übliche Divisionszeichen gewählt.

Durch allerhöchsten Erlaß des kgl. Staatsministeriums des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 29. April 1861 wurde dem bisherigen Unterrichtsstoffe noch die Lehre über Zinseszins- und Rentenrechnung, dann die Combinationslehre und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst dem binomischen Lehrsatze beigefügt. Die beiden erstern enthielt das Buch bereits in seiner ersten Auflage; die letztern wurden demselben als IV. Abschnitt des II. Theiles angehängt, da bei dem Erscheinen des oben erwähnten allerhöchsten Rescriptes der Druck des Werkes bereits zu weit vorangeschritten war, als daß dieselben am gehörigen Orte hätten eingereiht werden können.

Augsburg, den 24. August 1861.

Der Verfasser.

Inhalt.

IV. Abschnitt. Von den Potenzen.

II. Theil. Synthetische Gleichungen.

I. Abschnitt. Von den niedern algebraischen Gleichungen.

II. Abschnitt. Von den Proportionen und Progressionen.

III. Abschnitt. Von der Zins-, Diskonto- und Rentenrechnung.

IV. Abschnitt. Die Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung und der binomische Lehrsatz.

Berichtigungen:

Seite	6	Zeile	5	von	oben	ist	zu	lesen:	Widerspruch.
„	64	„	3	„	„	„	„	„	$2^3.3$.
„	88	„	15	„	„	„	„	„	$0{\cdot}0078.10^6$.
„	110	„	16	„	unten	„	„	streichen:	ebensoviele d. i.
„	199	„	3	„	„	„	„	lesen:	§. 229.
„	259	„	8	„	„	„	„	„	viereckige.

Allgemeine Einleitung.

I.

1) Die Mathematik (ἡ μαθηματική scil. τέχνη oder ἐπιστήμη = μαθήματα) ist die Wissenschaft, d. i. die wohlgeordnete Kenntniß, von den Eigenschaften, Beziehungen und Verbindungen der Größen.

2) Eine Größe (Quantum) nennt man Alles, was aus Theilen besteht, oder aus solchen bestehend gedacht werden kann, und daher einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist.

3) An einer Größe unterscheidet man zweierlei a) die Qualität, d. i. die Beschaffenheit der Theile und die Art und Weise ihrer Verbindung; b) die Quantität, d. i. die Menge der Theile, aus denen sie besteht oder bestehend gedacht wird.

4) Dasjenige, woraus man sich die Quantität einer Größe entstanden denkt, nennt man die Einheit oder das Maß; und angeben, wie oft ein bestimmtes Maß in einer Größe enthalten sei, heißt dieselbe messen.

5) Die Größen theilen sich in zwei Hauptklassen, nämlich a) in diskrete (abgesonderte), d. i. solche, deren Theile ohne Zusammenhang, also bloß ihrer Menge nach betrachtet werden; b) in stetige (continuirliche oder zusammenhängende), deren Theile in einem ununterbrochenen Zusammenhange stehen, und im Raume ausgedehnt sind.

II.

In Hinsicht auf ihre Qualität nennt man Größen:

1) an und für sich betrachtet a) abstrakt oder unbenannt, wenn man sich dieselben bloß aus Theilen bestehend denkt ohne Rücksicht darauf, von welcher Art dieselben sind, z. B. fünf,

b) konkret oder benannt, wenn sie eine bestimmte Qualität haben oder von einer gewissen Art sind, z. B. fünf Gulden;

2) in Beziehung auf eine oder mehrere andere Größen a) gleichartig (homogen) oder ungleichartig (heterogen), je nachdem man das berücksichtigt, was sie gemeinschaftlich haben, oder was in ihnen verschieden ist, z. B. zwei Münzen, b) übereinstimmend oder entgegengesetzt, je nachdem sie mit einander verbunden sich gegenseitig vermehren oder vermindern.

Beispiele entgegengesetzter Größen sind: Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, Ereignisse vor und nach Christus, Temperaturen über und unter dem Gefrierpunkte, nördliche und südliche geographische Breite ꝛc.

Um entgegengesetzte Größen zu unterscheiden, nennt man die einen positive (oder bejahende) die andern negative (oder verneinende); die Grenze zwischen dem Positiven und Negativen wird Null genannt.

III.

In Bezug auf Quantität heißt man Größen:

1) an sich betrachtet: a) endlich, wenn sie sich durch irgend eine Einheit messen, also mit einem Maße unmittelbar oder mittelbar vergleichen lassen, b) unendlich, wenn ihre Quantität unbegrenzt ist, sie sich also weder mit einer abstrakten nochconkreten Einheit vergleichen lassen. Eine unendliche Größe ist entweder unendlich groß oder unendlich klein, je nachdem ihre Quantität unbegrenzt groß oder unbegrenzt klein ist, d. h. ihr Werth im ersten Falle größer, im zweiten kleiner als jede darstellbare Größe ist;

2) in Beziehung auf einander: a) gleich, wenn sie durch einerlei Maß gemessen dieselbe Menge der homogenen Theile haben, b) ungleich, wenn jene Menge verschieden ist, und zwar heißt in diesem Falle jene, welche die Einheit öfter in sich enthält, die größere, die andere die kleinere.

IV.

Durch einige von den oben angeführten Eintheilungen der Größen wird auch die der Mathematik bestimmt, und zwar zerfällt dieselbe

1) in Hinsicht auf ihren Gegenstand (ihr Objekt):

a) in die Arithmetik (Zahlenlehre) welche die Eigenschaften der diskreten,

b) in die Geometrie (Raumgrößenlehre), welche die stetigen Größen behandelt;

2) in Bezug auf Theorie und Praxis (Lehre und Anwendung):

a) in die reine (abstrakte oder eigentliche Mathematik), welche sich mit den abstrakten Größen beschäftiget,

b) in die angewandte, welche konkrete Größen behandelt, oder die Lehren der reinen Mathematik auf Gegenstände der Natur und des Lebens bezieht. Ueberdieß wird die Mathematik noch eingetheilt

3) in Rücksicht auf den Umfang oder die Sphäre ihrer Untersuchungen:

a) in die niedere oder Elementarmathematik, welche die Eigenschaften und Verbindungen der Größen nur bis zu einer gewissen Grenze betrachtet,

b) in die höhere, welche die weitern Untersuchungen sich zur Aufgabe setzt.

V.

Das planmäßige Verfahren, nach welchem die Lehren der Mathematik vorgetragen, und als unumstößlich wahr (evident) dargethan werden, nennt man die mathematische Methode. Sie besteht darin, daß sie, streng wissenschaftlich verfahrend, mit Erklärungen beginnt, diesen Sätze folgen läßt, welche durch Beweise erhärtet werden.

A. Eine Erklärung (Definitio) ist die deutliche und genaue Darstellung des vollständigen Begriffes einer Sache, und insbesondere in mathematischem Sinne die genaue Angabe der Bedeutung, die fortan ein Wort haben soll. Sie ist zweifacher Art:

1) Worterklärung (Definitio nominalis oder verbalis), welche sagt, was das zu Erklärende ist, indem sie die charakteristischen, d. i. jene Merkmale davon angibt, wodurch es sich von allen andern Dingen unterscheidet,

2) Sacherklärung (Definitio genetica), welche angibt, wie der erklärte Gegenstand entstehen könne. Aus ihr erhellet zugleich die Möglichkeit des Erklärten.

B. Ein Satz (Propositio) ist im Allgemeinen eine geordnete Zusammenstellung von Worten, die über einen Gegenstand etwas aussagen. — Die mathematischen Sätze werden eingetheilt

1) in theoretische (Behauptungssätze), welche aussagen, daß etwas sei oder geschehe. Sie zerfallen

a) in Grundsätze oder Axiome, deren Wahrheit an und für sich einleuchtend ist, ohne einer besondern Bestättigung zu bedürfen, oder ohne einer solchen fähig zu sein;

b) in Lehrsätze oder Theoreme (bedingte Behauptungen), deren Wahrheit erst mittelst anderer schon anerkannter Wahrheiten als richtig dargestellt werden muß.

Bei jedem Lehrsatze kommen drei Fragen in Betracht: in welchem Falle ist etwas wahr? was ist wahr? und warum ist es wahr? Es besteht daher jedes Theorem aus drei Theilen

α) aus dem Datum oder der Hypothesis, d. i. dem eigentlichen Grunde der Behauptung (Voraussetzung, Bedingung oder Annahme),

β) aus der Thesis, d. i. der als wahr darzustellenden Behauptung selbst, und

γ) aus der Beweisführung, d. i. der Ueberzeugung von der Richtigkeit des Behaupteten durch schon anerkannte Wahrheiten.

Die Aenderung eines Lehrsatzes in der Art, daß man das Datum zur Thesis, und diese zum Datum macht, heißt den Satz umkehren.

Den theoretischen Sätzen gegenüber theilt man dieselben

2) in praktische (Forderungssätze), welche verlangen, daß etwas sein oder geschehen soll. Diese zerfallen ganz übereinstimmend mit den vorigen

a) in Postulate (Heischesätze), bei welchen die Möglichkeit der Ausführung des Verlangten von selbst einleuchtet;

b) in Aufgaben oder Probleme, bei denen die Art und Weise der Ausführung erst genau angegeben und die Richtigkeit des Verfahrens erwiesen werden muß.

Die Hauptmomente einer jeden Aufgabe sind

α) die Auflösung (Solutio), d. i. die wohlgeordnete Darlegung des Verfahrens, durch welches das Gesuchte erhalten wird, und

β) die Beweisführung, d. i. die Ueberzeugung von der Richtigkeit des eingeschlagenen Ganges.

3) Weitere Sätze, welche in der Mathematik vorkommen, sind folgende:

a) Zusätze oder Folgesätze (Corollaria), welche aus bereits anerkannten Sätzen unmittelbar hervorgehen, oder durch eine einfache Schlußfolgerung sich ableiten lassen;

b) Anmerkungen oder Noten (Scholia), welche nicht wesentlich zur Sache Gehöriges enthalten, als z. B. verschiedene Auflösungen einer Aufgabe, Hindeutungen auf die praktische Anwendung, historische Notizen 2c.;

c) Lehnsätze (Lemmata), welche Aussprüche enthalten, die entweder aus einer andern oder einem erst später folgenden Theile derselben Wissenschaft entlehnt sind;

d) Willkührliche Sätze (Hypothesen), d. i. eine Art von Erklärungen, welche von Einrichtungen, Eintheilungen, Zeichen 2c. handeln, die an sich willkührlich sind.

C. Ein Beweis (Demonstratio) ist der Inbegriff der Gründe, auf welchen die Wahrheit eines Satzes beruht. Einen Satz beweisen heißt denselben aus einer zusammenhängenden Reihe schon anerkannter Wahrheiten als evident d. i. unumstößlich richtig darstellen.

1) Jeder Beweis enthält drei Bestandtheile, nämlich

a) die Vorbereitung, d. i. die Angabe dessen, was geschehen soll, und die etwa zum Beweise nöthigen Hilfsmittel,

b) die Beweisführung, d. i. die consequente Anwendung schon anerkannter Wahrheiten, die man Beweisgründe nennt,

c) den Schluß oder die Conclusion, d. i. die Ueberzeugung von der Wahrheit der Behauptung.

2) Die Beweisführung für einen Satz kann auf verschiedene Art geschehen, und zwar nennt man dieselbe:

a) synthetisch (progressiv), wenn man von schon anerkannten Wahrheiten ausgeht und durch Schlüsse auf die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes führt;

b) analytisch (regressiv), wenn man umgekehrt von dem aufgestellten Satze ausgehend durch Schlüsse auf einen als wahr anerkannten Satz zurückgelangt;

c) direkt, wenn die Wahrheit eines Satzes unmittelbar aus andern wahren Sätzen hervorgeht;

d) indirekt oder apagogisch, wenn gezeigt wird, daß das Gegentheil des Behaupteten (oder jeder der übrigen noch denkbaren Fälle) unmöglich sei, auf einen Widerspruch mit der Voraussetzung oder eine Ungereimtheit (Absurdität) führe, also die Behauptung wahr sei. — Noch eine weitere, in der Arithmetik nicht selten gebrauchte Beweisart ist

e) der Induktionsbeweis, wenn man einen Satz für mehrere auf einander folgende Fälle erweist, und dann auf seine Allgemeingiltigkeit schließt.

VI.

Von den allgemeinen mathematischen Grundsätzen (Axiomen) finden besonders folgende eine fortwährende Anwendung:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.

2) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich.

3) Das Ganze ist größer, als einer oder einige seiner Theile, also umgekehrt ein Theil kleiner als das Ganze.

4) Gleiche Größen lassen sich für einander setzen (substituiren).

5) Zwei Größen, deren jede der nämlichen dritten gleich ist, sind es auch unter sich.

6) Ist von drei Größen die eine größer als die zweite, und diese wieder größer als die dritte, so ist auch die erste größer als die dritte.

7) Gleiche Größen auf gleiche Weise verändert geben wieder Gleiches.

8) Gleiches auf ungleiche, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert gibt Ungleiches.

VII.

Um Größen selbst, oder gewisse Eigenschaften oder Beziehungen derselben zu einander auszudrücken, hat man in der Mathematik bestimmte Bezeichnungen eingeführt, die man mathematische Zeichen nennt.

1) Größen überhaupt werden durch Buchstaben (am gewöhnlichsten durch die des lateinischen Alphabets) bezeichnet, so daß

also z. B. A, B, C . . . M, N ꝛc. irgendwelche Größen ausdrücken.

2) Zur Bezeichnung entgegengesetzter Größen bedient man sich der Zeichen „+ und —“, welche vor die Bezeichnungen der Größen selbst geschrieben werden, in der Art, daß + (übersetzt mit plus oder positiv) eine positive, dagegen — (übersetzt mit minus oder negativ) eine negative Größe ausdrückt. Uebereinstimmende Größen führen dasselbe Zeichen. Will man unentschieden lassen, ob eine Größe in Bezug auf eine andere positiv oder negativ zu nehmen sei, so setzt man ihr das Doppelzeichen „$\pm$“ (plus oder minus) voran.

3) Um eine Größe zu bezeichnen, die man sich unendlich groß denkt, dient das Zeichen „∞“, zur Bezeichnung des unendlich Kleinen „$\frac{1}{\infty}$“ (gelesen: 1 gebrochen durch unendlich). Die Abwesenheit einer Größe, oder etwas, was gar keine Größe hat, wird durch das Zeichen „0“ (Null) ausgedrückt.

4) Die Gleichheit zweier (oder mehrerer) Größen wird durch das zwischen sie gesetzte Zeichen „$=$“ angedeutet, welches Gleichheitszeichen genannt und durch „ist gleich“ übersetzt wird.

Die Ungleichheit zweier Größen wird durch das Ungleichheitszeichen „$>$“ in der Art ausgedrückt, daß die Oeffnung gegen die größere, die Spitze aber gegen die kleinere Größe gerichtet ist, und es wird z. B. $A > B$ gelesen „A ist größer als B“, dagegen $C < D$ „C ist kleiner als D“.

Läßt man unentschieden, ob zwei Größen gleich oder ungleich seien, so werden zwei Zeichen gesetzt. So heißt z. B. $A \overline{\overline{>}} B$ „A ist gleich oder größer als B“; ebenso $C \gtrless D$ „C ist größer oder kleiner als D“. Bei völliger Unentschiedenheit gebraucht man auch das Zeichen „$\gtreqless$“, welches durch „ist größer, gleich oder kleiner als“ übersetzt wird.

5) Von großer Wichtigkeit sind in der Mathematik die Einschlußzeichen, Klammern oder Parenthesen ( ) oder [ ]. Sie zeigen an, daß die von ihnen eingeschlossenen Größen (sie mögen in sonst was immer für einer Verbindung stehen) als eine, als ein Ganzes zu betrachten und zu behandeln seien,

und werden durch die Worte „das Ganze, oder Alles, Alles dieses, Alles zusammen ꝛc.“ übersetzt.

Eine in Klammern stehende Größenverbindung in eine andere ihr gleiche verwandeln, die nicht mehr eingeschlossen ist oder eingeschlossen zu sein braucht, heißt die **Klammern auflösen.** Es geschieht dieses dadurch, daß mit den eingeschlossenen Größen jenes Verfahren oder jene Veränderung vorgenommen wird, die ein außerhalb der Klammern stehendes Zeichen andeutet.

Anm. Weitere mathematische Zeichen werden am geeigneten Orte aufgeführt und erklärt werden.

Elementar-
Arithmetik.

Ψεῦδος οὐδαμῶς ἐς ἀριθμὸν ἐπιπνεῖ· πολέμιον γὰρ καὶ ἐχθρὸν αὐτῷ τᾷ φύσι· ἁ δὲ ἀλάθεια οἰκεῖον καὶ σύμφυτον τᾷ τῶ ἀριθμῶ γενεᾷ.

Philolaos (Frgm. XVIII.)

Einleitung.

§. 1.

1. Die Arithmetik (Ἀριθμητική scil. τέχνη, Rechenkunst, Zahlenlehre) ist die wissenschaftliche Kenntniß der Eigenschaften und Verbindungen der Zahlen.

2. Unter einer Zahl oder Zahlengröße versteht man überhaupt eine Mehrheit oder einen Inbegriff von gleichen und gleichartigen Dingen, deren jedes für sich betrachtet eine Einheit genannt wird.

3. Wird eine Zahl als Inbegriff von Einheiten, d. i. als ein Ganzes betrachtet, so heißt sie eine ganze Zahl, z. B. 3 Monate; ist sie aber kleiner, als die bei einer andern zu Grunde gelegte Einheit, enthält sie also nur einen oder einige Theile derselben, so wird sie eine gebrochene oder Bruch-Zahl oder kurz ein Bruch genannt, z. B. ein Vierteljahr.

4. Ist die einer Zahl zu Grunde gelegte Einheit eine bestimmte (ein sinnlich wahrnehmbares Ding), so heißt die Zahl eine benannte oder konkrete, z. B. sieben Gulden; ist dagegen die Einheit unbestimmt (eine bloß gedachte), also die Zahl eine bloße Zahl, ein bloßer Inbegriff von Einheiten, so wird sie eine unbenannte oder abstrakte Zahl genannt.

5. Jede Zahl, bei welcher lediglich nur auf ihre Quantität gesehen wird, heißt man eine absolute Zahl.

§. 2.

1. Die geistige Thätigkeit durch successives Zusetzen oder Wegnehmen der Einheit Zahlen zu bilden, heißt Zählen oder Numeriren.

2. Um Zahlen auszudrücken bedient man sich gewisser Zeichen, welche *Zahlzeichen* oder *Ziffern* genannt werden.

3. Die Reihe der Zahlen auf eine bestimmte Weise durch künstliche Verbindung von Zahlzeichen dargestellt, nennt man ein *Zahlensystem*.

§. 3.

In Hinsicht auf ihren Werth theilt man alle Zahlen in zwei Hauptklassen, nämlich:

1) in *besondere* oder *bestimmte*, bei welchen die Menge ihrer Einheiten genau angegeben ist, z. B. hundert. Zur Bezeichnung aller solchen Zahlen reichen die folgenden sogenannten arabischen Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nebst dem Zeichen 0 aus, indem man jeder von ihnen einen doppelten Werth beilegt, nämlich a) einen *ursprünglichen* oder *Nominalwerth*, den sie vermöge ihrer Figur ausdrückt, und b) einen *Lokal-* oder *Stellenwerth*, den sie in Verbindung mit andern Ziffern erhält. (*Dekadisches Zahlensystem*.)

2) in *allgemeine* oder *unbestimmte*, wenn die Menge ihrer Einheiten nicht genau ausgedrückt ist, z. B. einige, viele, alle, irgend eine Zahl ꝛc.

Zur Bezeichnung solcher allgemeiner Zahlen gebraucht man gewöhnlich die *Buchstaben* des kleinen lateinischen (seltener des griechischen) Alphabetes, und nennt sie in dieser Anwendung *Buchstabengrößen* oder *algebraische Zahlen*, oder auch *allgemeine Zahlzeichen*.

Anm. Jeder Buchstabe als allgemeines Zahlzeichen kann jede besondere Zahl vorstellen, für die Dauer ein und derselben Rechnung aber nur ein und dieselbe Zahl. — Oefter werden auch verschiedene Größen, welche irgendwelche gemeinsame Merkmale oder Eigenschaften besitzen, durch den nämlichen Buchstaben bezeichnet, dann wird aber derselbe mit unterscheidenden Merkzeichen versehen, als Accenten, rechts unten mit kleinerer Schrift angehängten Nummern, die man *Zeiger* oder *Indices* nennt. Z. B. a', a'', a''' . . . oder a_1, a_2, a_3 . . . . gelesen: a prim, secund, terz ꝛc. oder a mit dem Index 1, 2, 3 . . . .

§. 4.

1. Aus zwei oder mehreren gegebenen Zahlen andere neue ableiten, heißt *Rechnen* oder *Kalkuliren*, und die verschiedenen Arten, auf welche dieses geschehen kann, werden *Opera-*

tionen oder Rechnungsarten genannt. Eine vorzunehmende Operation wird durch gewisse Zeichen angedeutet, welche Rechnungs- oder Operations-Zeichen heißen.

2. Die bei einer Rechnung gegebenen Zahlen nennt man gewöhnlich bekannte, die erst zu findenden unbekannte Größen oder Zahlen. Ist eine (oder mehrere) Unbekannte gefunden, d. i. ihr Werth durch die bekannten Größen bestimmt, so heißt sie das Resultat der Rechnung.

3. Das Rechnen mit besondern Zahlen bezeichnet man mit dem Namen gemeine Arithmetik oder Zifferrechnung, das mit allgemeinen Zahlen oder Buchstaben mit allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnung (Calculus litteralis).

§. 5.

1. Jedes Zeichen überhaupt, durch welches eine Zahl ausgedrückt wird, und insbesondere die Verbindung zweier oder mehrerer Zahlen durch Rechnungszeichen nennt man einen Zahlen- oder Rechnungs-Ausdruck oder kurz einen Ausdruck. Enthält ein Ausdruck allgemeine Zahlen, so wird er auch ein algebraischer Ausdruck genannt.

2. Ein Ausdruck, bei welchem man lediglich nur auf die durch ihn angedeutete Operation sieht, heißt ein allgemeiner Ausdruck oder eine allgemeine Form.

3. Werden für die in einem algebraischen Ausdrucke vorkommenden Buchstaben besondere Zahlen angenommen (substituirt), und mit diesen die angedeuteten Operationen ausgeführt, so heißt die als Resultat erscheinende Zahl der numerische Werth des gegebenen Ausdruckes.

§. 6.

1. Die Verbindung zweier gleicher Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen heißt eine Gleichung (Aequatio), die zweier ungleicher Ausdrücke durch das Zeichen der Ungleichheit eine Ungleichung.

2. Die beiden durch das Gleichheits- oder Ungleichheitszeichen verbundenen Ausdrücke werden die Seiten der Gleichung oder

Ungleichung genannt, und zwar gewöhnlich der vor dem Zeichen stehende die erste oder linke, der hinter demselben stehende die zweite oder rechte Seite.

3. Die Gleichungen theilen sich in zwei Hauptklassen, nach denen sich auch die Eintheilung der Arithmetik richtet:

a) in analytische oder arithmetische, deren Seiten unbedingt gleich sind, d. h. sich gleich bleiben, man mag was immer für besondere statt der darin vorkommenden allgemeinen Zahlen setzen. — Eine solche Gleichung bildet jedes Resultat einer Rechnung mit dem Ausdrucke, aus dem es entwickelt wurde;

b) in synthetische oder algebraische, bei denen die Gleichheit bedingt, d. h. der Werth einer oder mehrerer darin vorkommender Größen vom Werthe der übrigen abhängig ist.

4. Eine Gleichung, deren Seiten auch der Form nach, also einander völlig gleich sind nennt man eine identische oder Identitätsgleichung.

I. Theil. Analytische Gleichungen.

I. Abschnitt. Die Grundoperationen.

§. 7.

Erkl. 1. Diejenigen Rechnungsarten, welche die Grundlage aller übrigen Operationen bilden, und auf welche sich zuletzt alle zurückführen lassen, heißen Grundoperationen oder Stammrechnungsarten.

2. Man unterscheidet folgende vier Grundoperationen: die Addition, Subtraktion, Multiplication und Division, welche auch unter dem Namen der vier Spezies bekannt sind.

I. Kap. Addition.

§. 8.

Erkl. 1. Addiren heißt aus zwei (oder mehreren) gegebenen Zahlen eine dritte finden, welche soviele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammengenommen.

Die gegebenen, d. i. zu addirenden Zahlen werden Summanden, Posten oder auch Addenden, die erst zu findende die Summe genannt. Die Summanden nennt man auch Glieder der Summe.

2. Um anzudeuten, daß Zahlen addirt werden sollen, gebraucht man das Zeichen „+“, welches Additionszeichen oder Pluszeichen genannt, zwischen die Summanden geschrieben, und durch „plus oder mehr oder dazu addirt“ übersetzt wird.

3. Die allgemeine Form (vgl. §. 5, 2) einer Summe, wenn a und b beliebige Posten bezeichnen, ist $a+b$ *).

Zus. 1. Nach dem Begriffe des Addirens ist eine Summe ein Ganzes, dessen Theile die einzelnen Summanden sind.

Zus. 2. Bezeichnen a und b beliebige Zahlen, und s eine dritte Zahl, welche soviele Einheiten enthält, als a und b zusammen, so erhält man die Gleichung $a+b=s$, d. h. —?

In dieser Gleichung nennt man $a+b$ eine formelle, s dagegen ihre reelle (wirkliche) Summe.

Zus. 3. Von zwei ungleichen Zahlen läßt sich die größere stets als eine Summe aus der kleinern und einer dritten Zahl betrachten; d. h. wenn $a>b$, so kann man $a=b+x$ setzen, wobei x jene Zahl bezeichnet, die soviele Einheiten hat, als der Zahl b noch abgehen, um so groß als a zu sein.

§. 9.

Lehrs. In einer Summe lassen sich die Summanden (beliebig) vertauschen.

Thes. $a+b=b+a$.

Bew. Eine Summe ist ein Ganzes, dessen Theile die Summanden sind (§. 8, Zus. 1); so lange daher die Summanden dieselben sind, wird auch die Summe die nämliche sein, da auf ihre Größe (Quantität) die Anordnung oder Stellung der Theile offenbar ohne Einfluß ist. Die Vertauschung der Summanden ändert nur die Form, aber nicht den Inhalt.

Zus. Der Lehrsatz gilt aus dem gleichen Grunde für beliebig viele Summanden. Es ist demnach z. B.

$$\begin{aligned} a+b+c &= a+c+b = b+c+a \\ &= b+a+c = c+a+b \\ &= c+b+a. \end{aligned}$$

Diese Regel wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „In einer Summe ist die Ordnung der Summanden gleichgiltig.“

*) Um in einer Summe von zwei Posten diese von einander zu unterscheiden, nennen manche Schriftsteller den einen (a) Amplificand, den andern (b) Amplificator.

§. 10.

Lehrs. Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, wenn man sie zu einem ihrer Posten addirt, und die erhaltene Summe um den andern Summanden vermehrt.

Thes. $(a + b) + c = (a + c) + b = (b + c) + a$.

Bew. Da man statt des Ganzen die Theile und umgekehrt setzen kann, so erhält man

$(a + b) + c = a + b + c$ (Allg. Einl. VI. 2. und 4.)
$= a + c + b = b + c + a$ (§. 9. Zus.)
$= (a + c) + b = (b + c) + a$.

Zus. 1. Eine Summe wird zu einer Zahl addirt, wenn man zu ihr den einen Summanden, und zur erhaltenen Summe den andern addirt; d. h. $a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$. Folgt aus dem Lehrs. mittelst §. 9.

Zus. 2. Enthält ein Ausdruck, in welchem nur das Zeichen + vorkommt, Klammern, so können diese beliebig verändert oder auch ganz weggelassen werden.

§. 11.

Lehrs. Gleiches zu Gleichem addirt gibt wieder Gleiches (d. i. gleiche Summen).

Dat. $a = b$ und $m = n$.

Thes. $a + m = b + n$.

Bew. Es ist $a + m = a + m$ (Allg. Einl. VI. 1.). Da nun $a = b$ und $m = n$ ist (Dat.) so kann auf der rechten Seite dieser Gleichung b statt a und n statt m gesetzt werden (Allg. Einl. VI. 4.), wodurch die Behauptung erwiesen ist.

Zus. Gleiche Zahlen geben wieder Gleiches, wenn man zu beiden dieselbe dritte Zahl addirt.

§. 12.

Lehrs. Gleiches und Ungleiches zu einander addirt gibt Ungleiches, und zwar ist jene Summe die größere, welche den größern Summanden erhält.

Dat. $a = b$ und $m > n$.

Thes. $a + m > b + n$.

Bew. Weil $m > n$, so kann man $m = n + x$ setzen (§. 8.

Zus. 3.). Wird nun diese Gleichung zu $a = b$ addirt, so erhält man

$$a + m = b + (n + x) \text{ (§. 11.) oder}$$
$$= (b + n) + x \text{ (§. 10. Zus. 1.); mithin}$$
$$a + m > b + n \text{ (Allg. Einl. VI. 3.).}$$

Zus. Größeres zu Größerem addirt gibt Größeres; d. h. wenn $a > b$ und $m > n$, so ist auch $a + m > b + n$. Die Richtigkeit ergibt sich wie oben, wenn man $a = b + x$ und $m = n + y$ setzt.

Anm. Wenn Kleineres zu Größerem addirt wird, so erhält man Unentschiedenes, d. h. die eine Summe kann gleich der andern, oder größer oder kleiner als dieselbe sein.

§. 13.

Erkl. 1. Eine Summe von lauter gleichen Posten wird kürzer dadurch bezeichnet, daß man den Summanden nur einmal anschreibt, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft er vorhanden ist, ihm unmittelbar vorsetzt. Demnach ist z. B. $a + a + a + a = 4a$, und umgekehrt.

2. Jene Zahl, welche ohne Zeichenverbindung vor einer allgemeinen stehend anzeigt, wie oft diese als Summand zu setzen sei, heißt Koëffizient derselben.

3. Der Koëffizient einer Zahl kann selbst wieder eine allgemeine Zahl sein, indem man unbestimmt lassen kann, wie oft eine Zahl als Summand gesetzt werden soll, z. B. $na = a + a + a \dots$ ... (n mal). Ein solcher Koëffizient heißt ein unbestimmter.

Hat eine Zahl keinen Koëffizienten bei sich, so ist stets die Einheit als solcher hinzuzudenken. Z. B. $a = 1a$.

4. Zwei oder mehrere Ausdrücke, welche in den allgemeinen Zahlen vollkommen übereinstimmen, nennt man gleichartig, außerdem ungleichartig. So sind z. B. 7a und 5a gleichartig, dagegen 7a und 5b ungleichartig.

§. 14.

Erkl. 1. Jeder Ausdruck, der keine Summe ist, oder doch nicht als solche betrachtet werden soll (dessen Bestandtheile nicht durch + verbunden sind), heißt ein einfacher, eingliedriger Ausdruck oder ein Monom, z. B. 15b, mc.

2. Jede Summe mehrerer Summanden (arithmetische Summe) wird ein zusammengesetzter oder mehrgliediger Ausdruck, eine complexe Größe oder ein Polynom genannt. Die zweigliedrige complexe Größe heißt man gewöhnlich ein Binom oder eine Binomialgröße, die dreigliedrige ein Trinom.

3. Gegebene Ausdrücke in eine Summe vereinigen, heißt formell oder arithmetisch addiren, dagegen dieselben durch arithmetische Operation auf einen kürzern Ausdruck von gleichem Werthe bringen, reduziren.

§. 15.

Aufg. Gegebene einfache Ausdrücke zu addiren.

Aufl. u. Bew. Da die gegebenen Ausdrücke entweder gleichartig oder ungleichartig sein können, so unterscheiden wir folgende Fälle:

1) Gleichartige Ausdrücke lassen sich reduziren, und zwar indem man ihre Koëffizienten addirt, und deren Summe vor die unveränderte allgemeine Zahl als Koëffizient setzt; denn nach dem Begriffe des Koëffizienten soll die Zahl vermöge eines jeden so oft als Summand gesetzt werden, als er Einheiten hat, folglich im Ganzen so oft, als sie deren zusammen haben. Demnach ist z. B.

$$7a + 15a + 3a + a = 26a.$$

2) Ungleichartige Ausdrücke lassen sich nur formell addiren, oder als ein Polynom darstellen, wobei die Glieder gewöhnlich nach der Ordnung des Alphabetes aneinandergereiht (alphabetisch geordnet) werden. So ist z. B. die Summe der Ausdrücke 4c, 7b, 2a, 9d, nf gegeben durch

$$4c + 7b + 2a + 9d + nf = 2a + 7b + 4c + 9d + nf.$$

Zus. Sind die Koëffizienten gleichartiger Größen selbst ungleichartig, so wird ihre (formelle) Summe in Klammern gestellt, und im Uebrigen wie oben verfahren. Z. B.

$$8a + 3b + 2a + nb = 8a + 2a + 3b + nb \text{ (§. 9.)}$$
$$= 10a + (3 + n)b.$$

§. 16.

Aufg. Gegebene zusammengesetzte Ausdrücke (soweit es möglich ist) zu reduziren.

Aufl. u. Bew. Da man sich die Klammern, welche die einzelnen zusammengesetzten Summanden bezeichnen, als nichtvorhanden denken kann (§. 10. Zus. 2.); so ist das ganze Verfahren auf §. 15. zurückgeführt. Hiebei kann folgende praktische Regel beobachtet werden: Man gehe alle Glieder der Polynomien der Ordnung nach durch, stelle die ungleichartigen neben, die gleichartigen unter einander, reduzire sodann die gleichartigen Bestandtheile und addire die ungleichartigen nach §. 15. Hat man z. B. folgende complexe Posten zu addiren:

$$(5a + 8b + 9c) + (10m + 12 + 2a) + (3c + 7b + m) + (6c + 8 + 5b) + (a + 4m + 6) + (2a + 12c + 14);$$

so stellt sich die Rechnung folgendermassen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5a & + & 8b & + & 9c & + & 10m & + & 12 \\ 2a & + & 7b & + & 3c & + & m & + & 8\ . \\ a & + & 5b & + & 6c & + & 4m & + & 6 \\ 2a & & & + & 12c & & & + & 14\ ; \end{array} \quad \text{mithin}$$

$$\text{die Summe} = 10a + 20b + 30c + 15m + 40\ .$$

II. Kap. Subtraktion.

§. 17.

Erkl. 1. Eine Zahl von einer andern subtrahiren oder abziehen heißt eine dritte Zahl finden, welche zur erstern addirt die letztere als Summe gibt.

Von den gegebenen Zahlen heißt jene, von welcher subtrahirt wird, der Minuend, die andere, welche abgezogen wird, der Subtrahend, die zu findende dritte Zahl Differenz, Unterschied oder auch Rest. Minuend und Subtrahend werden auch Glieder der Differenz genannt, und zwar jener das erste, dieser das zweite Glied.

2. Das Zeichen für die Subtraktion ist „—", welches Subtraktions- oder Minuszeichen genannt, zwischen die beiden Glieder geschrieben, und durch „minus oder weniger oder davon subtrahirt" übersetzt wird.

3. Der allgemeine Ausdruck einer Differenz, wenn a einen beliebigen Minuend, b den Subtrahend bezeichnet, ist $a - b$.

Zus. 1. Der Minuend ist eine Summe, deren Summanden

der Subtrahend und die Differenz sind. Denn ist $a - b = d$; so muß $a = b + d$, d. h. es muß d jene Zahl sein, die zu b addirt a gibt.

Zus. 2. Wenn man also zur Differenz zweier Zahlen den Subtrahend addirt, so erhält man den Minuend als Summe, d. h. es ist $(a - b) + b = a$.

Zus. 3. Wenn man von der Summe zweier Zahlen den einen Summanden subtrahirt, so erhält man den andern, d. h. $(a + b) - b = a$.

Zus. 4. Die in den Zuss. 2. und 3. angegebenen Gleichungen lassen sich umgekehrt also aussprechen: Eine Zahl bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man die nämliche Zahl α) von ihr abzieht und zur erhaltenen Differenz wieder addirt, oder β) zu ihr addirt und von der Summe wieder abzieht.

§. 18.

Lehrs. Eine Zahl wird von einer Summe subtrahirt, wenn man sie von einem Summanden abzieht, und die Differenz und den andern Summanden addirt.

Thes. $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$ *).

Bew. Ist I) $(a - c) + b$ die richtige Differenz, so muß der Subtrahend c zu ihr addirt den Minuend geben. Nun ist aber

$$(a - c) + b + c = (a - c) + c + b \text{ (§. 9.)}$$
$$= ((a - c) + c) + b$$
$$= a + b \text{ (§. 17. Zus. 2.)}$$

Ebenso ist II) der andere Ausdruck $a + (b - c)$ richtig; denn

$$(a + b) - c = (b + a) - c = (b - c) + a, \text{ (I. Fall) oder}$$
$$= a + (b - c).$$

Zus. 1. Eine Zahl wird zu einer Differenz oder eine Differenz zu einer Zahl addirt, wenn man die Zahl und den Minuend addirt, und von der Summe den Subtrahend subtrahirt. (Umkehrung des Lehrs.)

Zus. 2. Eine Differenz wird zu einer Zahl addirt, wenn man von letzterer den Subtrahend abzieht und zur Differenz den

*) Man unterlasse nicht, diesen und alle folgenden Sätze auf besondere Zahlen anzuwenden!

Minuend addirt. Denn es ist auch $a + (b - c) = (a - c) + b$ (Allg. Einl. VI. 5.).

§. 19.

Lehrs. Eine Zahl wird von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie vom Minuend abzieht und von der Differenz den Subtrahend subtrahirt.

Thes. $(a - b) - c = (a - c) - b$.

Bew. Wenn $(a - c) - b$ die richtige Differenz ist, so muß c zu ihr addirt den Minuend $a - b$ geben. Nun ist

$$(a - c) - b + c = ((a - c) + c) - b \text{ (§. 18. Zus. 1.)}$$
$$= a - b \text{ (§. 17. Zus. 2.)}.$$

Zus. Sind also von einer Zahl zwei andere abzuziehen, so ist es gleichgiltig, in welcher Ordnung sie subtrahirt werden.

§. 20.

Lehrs. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahirt, wenn man von ihr zuerst den einen Summanden, und von der erhaltenen Differenz den andern Summanden subtrahirt.

Thes. $a - (b + c) = (a - b) - c$.

Bew. Addirt man zum angegebenen Resultate den Subtrahenden, so wird

$$((a - b) - c) + (b + c) = ((a - b) - c) + b + c \text{ (§. 10. Zus. 2.)}$$
$$= ((a - b) - c) + c + b \text{ (§. 9.)}$$
$$= (a - b) + b$$
$$= a \text{ (§. 17. Zus. 2.)}.$$

Zus. 1. Eine Zahl wird (umgekehrt) von einer Differenz subtrahirt, wenn man sie zum Subtrahend addirt, und die Summe vom Minuend subtrahirt (vergl. §. 19.).

Zus. 2. Der Lehrsatz gilt auch für eine Summe von mehreren Summanden; man erhält nämlich die Differenz, wenn man die einzelnen Summanden der Reihe nach subtrahirt; d. h. es ist z. B. $a - (b + c + d) = ((a - b) - c) - d$.

Zus. 3. Sollen umgekehrt von einer Zahl mehrere andere nach einander subtrahirt werden, so kann man gleich die Summe aller Subtrahenden von ihr abziehen, d. h. es ist

$$(((a - b) - c) - d) - m = a - (b + c + d + m).$$

§. 21.

Lehrs. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt, wenn man I) den Minuend von der Zahl abzieht, und zur Differenz den Subtrahend addirt, oder II) den Subtrahend addirt und von der Summe den Minuend subtrahirt.

Thes. $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b$.

Bew. I. Addirt man zur Differenz den Subtrahend, so folgt

$$\begin{aligned}(a-b)+c+(b-c) &= (a-b)+(b-c)+c \text{ (§. 9.)}\\ &= (a-b)+((b-c)+c)\\ &= (a-b)+b=a \text{ (§. 17. Zus. 2.)}.\end{aligned}$$

II. Es ist

$$\begin{aligned}a-(b-c) &= (a-b)+c \text{ (I. Fall.)}\\ &= (a+c)-b \text{ (§. 18. Zus. 1.)}.\end{aligned}$$

Zus. Eine Zahl wird (umgekehrt) zu einer Differenz addirt, wenn man sie vom Subtrahend abzieht, und den Unterschied vom Minuend subtrahirt.

§. 22.

Lehrs. Die Differenz zweier Zahlen wird nicht geändert, wenn man zum Minuend und Subtrahend entweder I. dieselbe Zahl addirt, oder II. dieselbe Zahl von beiden subtrahirt.

Thes. $a-b=(a+m)-(b+m)=(a-n)-(b-n)$.

Bew. Es ist

$$\begin{aligned}a-b &= ((a-b)+m)-m \text{ (§. 17. Zus. 4. } \beta)\\ &= ((a+m)-b)-m \text{ (§. 18. Zus. 1.)}\\ &= (a+m)-(b+m) \text{ (20. Zus. 1.)}.\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung wird auf ganz ähnliche Art bewiesen.

§. 23.

Lehrs. Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt wieder Gleiches (d. i. gleiche Differenzen).

Dat. $a=b$ und $m=n$.

Thes. $a-m=b-n$.

Bew. Ganz wie §. 11.

Zus. Gleiche Zahlen geben wieder Gleiches, wenn von beiden dieselbe dritte Zahl subtrahirt wird.

§. 24.

Lehrs. Gleiches von Ungleichem subtrahirt gibt Ungleiches, und zwar ist auf Seite des größern Minuends die größere Differenz.

Dat. $a > b$ und $m = n$.

Thes. $a - m > b - n$.

Bew. Setzt man $a = b + x$ (§. 8. Zus. 3.), so folgt durch Subtraktion von $m = n$

$$a - m = (b + x) - n \text{ (§. 23.)}$$
$$= (b - n) + x \text{ (§. 18.); daher}$$
$$a - m > b - n \text{ (Allg. Einl. VI. 3.).}$$

Anm. Man drückt den Lehrsatz gewöhnlich kurz also aus: „Gleiches von Größerem subtrahirt gibt Größeres."

§. 25.

Lehrs. Wird Ungleiches von Gleichem subtrahirt, so ist auf Seite des größern Subtrahends die kleinere Differenz (kurz: Größeres von Gleichem subtrahirt gibt Kleineres).

Dat. $a = b$ und $m > n$.

Thes. $a - m < b - n$.

Bew. Da $m > n$ ist, so kann man $m - x = n$ setzen. Wird nun diese Gleichung von $a = b$ subtrahirt, so folgt

$$a - (m - x) = b - n, \text{ oder}$$
$$(a - m) + x = b - n \text{ (§. 21. I.); also}$$
$$a - m < b - n.$$

Zus. Kleineres von Größerm subtrahirt gibt Größeres; dagegen bleibt Kleineres, wenn Größeres von Kleinerem subtrahirt wird. (Der Bew. ist ganz ähnlich.)

Anm. Subtrahirt man Größeres von Größerem, so kann Größeres, Gleiches oder Kleineres bleiben; die Differenz ist also unentschieden, oder „Größeres von Größerem gibt Unentschiedenes."

§. 26.

Lehrs. Alle Differenzen mit gleichem Minuend und Subtrahend sind einander gleich, und ihr gemeinschaftlicher Stellvertreter ist Null (0).

Thes. $a - a = b - b = 0$.

Bew. Addirt man zu beiden Differenzen dieselbe, übrigens beliebige Zahl m, so wird

$$(a - a) + m = (a + m) - a \text{ (§. 18. Zus. 1.)}$$
$$= (m + a) - a \text{ (§. 9.)}$$
$$= m \text{ (§. 17. Zus. 3.).}$$

Ebenso folgt $(b - b) + m = m$; es ist somit

$$a - a = b - b \text{ (Allg. Einl. VI. 5.).}$$

§. 27.

Lehrs. Eine Zahl bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man Null zu derselben entweder I. addirt oder II. von ihr subtrahirt (gewöhnlich kurz ausgesprochen: „Null addirt und subtrahirt nicht").

Thes. I. $a + 0 = a$. II. $a - 0 = a$.

Bew. I. Statt 0 kann man eine Differenz mit gleichen Gliedern, z. B. $m - m$, setzen; dadurch wird

$$a + 0 = a + (m - m) = (a + m) - m \text{ (§. 18. Zus. 1.)}$$
$$= a \text{ (§. 17. Zus. 3.)}$$

II. Die Gleichung ist richtig, da $a + 0 = a$ ist (I. Fall und §. 17.).

Zus. Jede Zahl kann (umgekehrt) betrachtet werden als eine Summe, in welcher der eine Summand $= 0$, oder als eine Differenz, in welcher der Subtrahend $= 0$ ist.

Anm. Daß die Nulle überhaupt in die Kategorie der Zahlen aufgenommen werden könne, geht daraus hervor, daß sie ebenso wie die übrigen Zahlen durch Wegnehmen der Einheit (vgl. §. 2, 1.) erhalten wird. Man kann aber im Wegdenken der Einheit noch weiter, über Null hinausgehen, wodurch dann die nachfolgend erklärten Zahlformen entstehen.

§. 28.

Erkl. 1. Ist in einer Differenz $a - b$ der Subtrahend größer als der Minuend, also $b > a$, so kann man $b = a + n$ setzen, und es wird dann $a - b = a - (a + n) = (a - a) - n = 0 - n$.

2. Eine Differenz, deren Minuend Null ist, die also die Form $(0 - a)$ hat, wird kurz durch $(-a)$ bezeichnet, und ein negativer (auch subtraktiver) Ausdruck genannt. Im Gegensatze davon bezeichnet man die Summe $(0 + a)$ durch $(+ a)$, und nennt diese Zahlform einen positiven (auch additiven) Ausdruck. In beiden Fällen heißt a das Glied des Ausdruckes.

3. Die Zeichen + (plus oder positiv) und — (minus oder negativ) heißen in dieser Anwendung überhaupt Vorzeichen. In Beziehung auf einander nennt man diese Zeichen entgegen-

gesetzte, und die Verwandlung des einen in das andere heißt das Zeichen wechseln oder umkehren.

4. Größen mit demselben Vorzeichen werden übereinstimmende, solche mit verschiedenen Zeichen entgegengesetzte genannt. Zahlen ohne Vorzeichen heißt man im Gegensatze zu andern, welche mit einem solchen behaftet sind, absolute Zahlen.

Zus. 1. Jede positive Zahl ist derselben absoluten gleich, und umgekehrt. Denn es ist $+a = 0 + a = a + 0 = a$.

Zus. 2. Eine negative Zahl ist um so kleiner, je größer ihr Glied ist. Denn ist $a > b$, so ist $0 - a < 0 - b$ (§. 25.), d. i. $-a < -b$.

§. 29.

Lehrs. Zu einer Zahl wird I. ein positiver Ausdruck addirt, wenn man sein Glied addirt, II. ein negativer, wenn man sein Glied subtrahirt.

Thes. I. $a + (+b) = a + b$. II. $a + (-b) = a - b$.

Bew. I. Folgt unmittelbar aus §. 28. Zus. 1. Denn es ist $+b = b$; daher $a + (+b) = a + b$.

II. Es ist $a + (-b) = a + (0 - b)$

$= (a + 0) - b$ (§. 18. Zus. 1.)

$= a - b$.

Zus. 1. Eine Differenz läßt sich in eine Summe verwandeln, wenn man zum Minuend den negativen Subtrahend addirt. (Umkehrung von II.)

Zus. 2. Eine negative Zahl addiren heißt also dieselbe subtrahiren. Entgegengesetzte Zahlen vermindern sich somit bei der Addition gegenseitig.

Zus. 3. Uebereinstimmende Größen zu einander addirt vermehren sich gegenseitig in demselben Sinne, d. h. positive geben eine positive, und negative eine negative Summe. Denn es ist $(+a) + (+b) = a + b = +(a + b)$. (§. 28. Zus. 1.).

Ferner ist

$(-a) + (-b) = (-a) + (0 - b) = ((-a) - b) + 0$ (§. 18. Zus. 2.)

$= (0 - a) - b$, (§. 27. I.)

$= 0 - (a + b)$, (§. 20. Zus. 1.)

$= -(a + b)$.

§. 30.

Lehrs. Von einer Zahl wird I. ein positiver Ausdruck subtrahirt, wenn man sein Glied abzieht, II. ein negativer, wenn man sein Glied addirt.

Thes. I. $a - (+b) = a - b$. II. $a - (-b) = a + b$.

Bew. I. Folgt, da $+b = b$ ist, aus §. 28. Zus. 1.

II. Es ist $a - (-b) = a - (0 - b) = (a + b) - 0$ (§. 21. II.)
$= a + b$. (§. 27. II.)

Zus. 1. Der Lehrsatz wird gewöhnlich so ausgesprochen: „Man erhält die Differenz zweier Größen, indem man den Sub„trahend mit verändertem Zeichen zum Minuend addirt.“ Denn es ist

$$a - (+b) = a - b = a + (-b), \text{ und}$$
$$a - (-b) = a + b = a + (+b) \text{ (§. 29.)}.$$

Zus. 2. Die Subtraktion verwandelt sich also durch Veränderung des Subtrahendzeichens in eine Addition.

Zus. 3. Eine Summe kann in eine Differenz verwandelt werden, wenn man von dem einen Summanden den negativen andern subtrahirt. (Umkehrung von II.)

§. 31.

Erkl. 1. Mehrere Ausdrücke, welche durch die Zeichen $+$ und $-$ miteinander verbunden sind, nennt man eine **algebraische Summe** (oder auch ein **Aggregat**).

2. Die einzelnen eine algebraische Summe bildenden Ausdrücke heißen **Glieder** derselben, und zwar **positive**, wenn $+$, **negative**, wenn $-$ vor ihnen steht. Bei dem ersten Gliede wird, wenn es positiv ist, das Zeichen $+$ gewöhnlich weggelassen; nie aber darf das Zeichen $-$ wegbleiben.

3. Glieder einer algebraischen Summe, welche selbst wieder algebraische Summen sind, und deßhalb in Klammern stehen, nennt man **zusammengesetzte** Glieder.

4. Hinsichtlich der Auflösung (vgl. A. E. VII. 5.) oder Anwendung von Klammern lassen sich zufolge der oben entwickelten Gesetze folgende Regeln aufstellen:

a) Steht vor einer Klammer das Zeichen $+$, so soll der eingeschlossene Ausdruck addirt werden, die Klammern können also

weggelassen, und die Glieder des Ausdruckes mit unveränderten Zeichen angeschrieben werden (§. 10. Zus. 2.). Z. B.

$$3a + (4b - 6c) - d = 3a + 4b - 6c - d.$$

b) Hat eine Klammer — vor sich, so soll der eingeschlossene Ausdruck subtrahirt werden, es sind somit bei Auflösung der Klammern die Zeichen aller Glieder zu verändern. Z. B.

$$7a - (5b + 3c - 4) + 2d = 7a - 5b - 3c + 4 + 2d.$$

c) Man kann das vor einer Parenthese stehende Zeichen unmittelbar in das entgegengesetzte verwandeln, wenn man zugleich die Zeichen aller eingeschlossenen Glieder ändert. Z. B.

$$9m - (8a - 3b) + (4c - 7d) = 9m + (3b - 8a) - (7d - 4c).$$

d) Umgekehrt lassen sich beliebig viele Glieder einer algebraischen Summe in Klammern stellen und dieser das Zeichen + oder — voransetzen, indem man in Hinsicht auf + alle jene Glieder mit unveränderten, dagegen in Bezug auf — mit veränderten Zeichen einschließt. So ist z. B.

$$5a - 8c + 4n - 1 = 5a + (4n - 8c - 1)$$
$$= 5a - (8c - 4n + 1).$$

Zus. 1. Jede algebraische Summe läßt sich (nach §. 29. Zus. 1. und 3.) in eine arithmetische Summe und in eine Differenz zweier Summen verwandeln. Z. B.

$$a - b + c - d + m = a + (-b) + c + (-d) + m$$
$$= (a + c + m) - (b + d).$$

Zus. 2. In einer algebraischen Summe ist die Ordnung der Glieder gleichgiltig; denn es ist einerlei, in welcher Ordnung mehrere Zahlen addirt und subtrahirt werden.

Zus. 3. Jedes Polynom (§. 14. 2.) ist eine algebraische Summe. Man hat hier nur den speziellen Fall, daß alle Glieder positiv sind.

Zus. 4. Gleiche Glieder einer algebraischen Summe mit entgegengesetztem Zeichen tilgen sich, oder, wie man gewöhnlich sagt, heben sich auf; denn sie bilden eine Differenz mit gleichem Minuend und Subtrahend.

§. 32.

Aufg. Die Glieder einer algebraischen Summe zu reduziren (wenn es möglich ist).

Aufl. u. Bew. Man löse die in dem gegebenen Ausdrucke vorkommenden Klammern auf (was am einfachsten nach §. 31. 4. c durch bloßen Zeichenwechsel geschieht) und verfahre dann ganz nach §. 16., indem man die gleichartigen Glieder mit ihren Zeichen unter und ebenso die ungleichartigen neben einander stellt, und dann mit Rücksicht auf §. 29. Zus. 3. und §. 31. Zus. 4. verfährt. Man habe z. B. folgende algebraische Summe zu reduziren:

$9m - (5n - 6c - (7n - 8b - 18) + 2a) - 2p + 4q - [3a - (2c - m - (8p + 2n) + 6b + 5q) - 6a - 13] + 10p - (5c + 9q + 4m)$.

Wechselt man die Zeichen in der Art, daß vor jeder Parenthese das Zeichen + steht, so verwandelt sich der ganze Ausdruck in folgenden, in welchem die Klammern als nicht vorhanden angesehen werden können:

$9m + (-5n + 6c + (7n - 8b - 18) - 2a) - 2p + 4q + [-3a + (2c - m + (-8p - 2n) + 6b + 5q) + 6a + 13] + 10p + (-5c - 9q - 4m)$.

Durch Zusammenstellung der Glieder mit ihren Zeichen erhält man ferner

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} +9m & -5n & +6c & -8b & -18 & -2a & -2p & +4q \\ -m & +7n & +2c & +6b & +13 & -3a & -8p & +5q \\ -4m & -2n & -5c & & & +6a & +10p & -9q \\ \hline +4m & & +3c & -2b & -5 & +a & & \end{array}$$

Die gegebene algebraische Summe gibt sonach reduzirt das alphabetisch geordnete Resultat $a - 2b + 3c + 4m - 5$.

III. Kap. Multiplikation.

§. 33.

Erkl. 1. Eine Zahl mit einer andern multipliziren heißt die erstere so oft als Summand setzen, als die letztere Einheiten enthält.

Jene Zahl, welche als Summand zu setzen ist, nennt man Multiplikand, jene, welche anzeigt, wie oft dieß geschehen soll, Multiplikator, und das Resultat der Multiplikation Produkt. Multiplikand und Multiplikator werden mit gemeinsamem Namen Faktoren des Produktes genannt (vgl. §. 34.).

2. Das Zeichen für die Multiplikation (Multiplikationszeichen genannt) ist „$\times$ oder .“, welches zwischen Multiplikand und Multiplikator geschrieben und durch „mal oder multiplizirt mit“ übersetzt wird.

3. Die allgemeine Form eines Produktes, wenn a den Multiplikand, b den Multiplikator bezeichnet, ist $a \times b$ oder $a . b$, oder auch bloß ab. Diese letztere Bezeichnungsart ist bei allgemeinen Zahlen und Klammern die gewöhnliche, darf jedoch bei besondern nicht angewendet werden.

Zus. 1. Ein Produkt ist also nichts anderes als eine Summe von lauter gleichen Summanden; folglich die Multiplikation eine Addition gleicher Posten.

Zus. 2. Jede Summe von gleichen Summanden ist (umgekehrt) einem Produkte gleich, das einen dieser Summanden als Multiplikand, und ihre Anzahl als Multiplikator hat. (Vgl. §. 13.)

§. 34.

Lehrs. In einem Produkte lassen sich Multiplikand und Multiplikator vertauschen.

Thes. $ab = ba$.

Bew. Nach dem Begriffe der Multiplikation ist

$$a . b = a + a + a + a + \ldots \text{ (b mal)}.$$

Wird nun die Zahl a als Menge von Einheiten in diese aufgelöst, so erhält man folgende Darstellung der Multiplikation

$$\begin{aligned} &1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ (a mal)} \\ &+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad \text{"} \\ &+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \quad \text{"} \\ &\text{u. s. w. (b mal).} \end{aligned}$$

Die Summe aller dieser Einheiten ist aber offenbar die nämliche, man mag sie in horizontaler oder vertikaler Richtung addiren, d. i. die a Einheiten der erstern b mal, oder die b Einheiten der letztern a mal setzen. Es ist somit $a . b = b . a$ oder $ab = ba$.

Anm. Hierauf beruht die gemeinschaftliche Benennung Faktoren eines Produktes (§. 33, 1.).

§. 35.

Lehrs. Eine Summe und eine Zahl werden multiplizirt, wenn man jeden Summanden mit der Zahl multiplizirt, und die erhaltenen Produkte (Partial- oder Theilprodukte genannt) addirt.

Thes. $(a + b)m = am + bm$.

Bew. Es ist dem Begriffe des Multiplizirens gemäß

$$(a + b)m = (a + b) + (a + b) + (a + b) + \ldots \text{ (m mal)}$$
$$= a + b + a + b + a + b + \ldots \text{ (§. 10. Zus. 2.)}$$
$$= (a + a + a \ldots) + (b + b + b + \ldots) \text{ (§. 9.)}$$
$$= am + bm. \text{ (§. 33. Zus. 2.)}$$

Zus. 1. Der Lehrsatz ist für Summen von beliebig vielen Summanden giltig. Denn es ist $(a + b + c)m = ((a + b) + c)m = (a + b)m + cm = am + bm + cm$ 2c.

Zus. 2. Die Summe zweier (oder mehrerer) Produkte, welche einen gemeinsamen Faktor haben, wird erhalten, wenn man mit diesem die Summe der andern (nicht gemeinsamen) Faktoren multiplizirt. (Umkehrung des Lehrs. und Zus. 1.).

§. 36.

Lehrs. Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man mit dieser Minuend und Subtrahend multiplizirt, und das letztere Produkt vom erstern subtrahirt.

Thes. $(a - b)m = am - bm$.

Bew. Ganz wie §. 35. mit Zuziehung von §. 31. Zus. 1.

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) die Differenz zweier Produkte mit einem gemeinsamen Faktor, wenn man mit diesem die Differenz der andern Faktoren multiplizirt.

Zus. 2. Der Lehrs. und Zus. 1. gilt auch für jede algebraische Summe; denn sie läßt sich betrachten als eine Differenz zwischen der Summe aller positiven und der aller negativen Glieder (§. 31. Zus. 1.).

Anm. Auf diesem und Zus. 2. des vor. §. beruht die Regel der Reduktion gleichartiger Größen. Z. B. $7a + 5a = (7 + 5)a = 12a$.

§. 37.

Lehrs. Ein Produkt wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man mit ihr einen Faktor desselben, und das erhaltene Produkt mit dem andern Faktor multiplizirt.

Thes. $(ab)m = (am)b = (bm)a$.

Bew. Es ist nach dem Begriffe der Multiplikation

$(ab)m = ab + ab + ab + \ldots$ (m mal)
$= (a + a + a + \ldots$ m mal) b (§. 35. Zus. 2.)
$= (am)b = b(am)$. (§. 34.)

Daß $(ab)m = (bm)a = a(bm)$ sei, folgt ebenso.

Zus. 1. Eine Zahl wird mit einem Produkte multiplizirt, wenn man sie mit dem einen Faktor, und das Produkt mit dem andern multiplizirt.

Zus. 2. In einem Produkte mehrerer Zahlen kann man die Faktoren beliebig vertauschen, d. i. „die Ordnung der Faktoren ist willkührlich." Es ist demnach $abcd = abdc = acbd = acdb$ ꝛc.

§. 38.

Lehrs. Ist in einem Produkte I. ein Faktor die Einheit, so ist das Produkt dem andern Faktor gleich; ist aber II. ein Faktor Null, so ist auch das Produkt Null.

Thes. I. $a \times 1 = 1 . a = a$. II. $a \times 0 = 0$.

Bew. I. Die Einheit als Faktor zeigt an, daß der andere Faktor nur einmal als Summand stehen soll. Dieses ist aber geschehen, wenn man ihn nur anschreibt; mithin ist $a . 1 = 1 . a = a$.

Man drückt diesen Satz gewöhnlich kurz so aus: „Eins multiplizirt nicht," oder „eine Zahl mit Eins multipliziren heißt dieselbe unverändert lassen."

II. Wendet man §. 26 an, d. h. setzt man z. B. $0 = m - m$, so wird

$$a . 0 = a(m - m) = am - am \text{ (§. 36.)}$$
$$= 0. \text{ (§. 26.)}$$

Zus. Durch Umkehrung von Nr. I. des Lehrs. erhält man folgenden: Jede Zahl läßt sich betrachten als ein Produkt aus sich selbst und der Einheit. (Vgl. §. 13, 3.)

§. 39.

Lehrs. Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt wieder Gleiches (d. i. gleiche Produkte).

Dat. $a = b$ und $m = n$.

Thes. $am = bn$.

Bew. Ganz wie §. 11.

Zus. 1. Gleiche Zahlen mit derselben dritten multiplizirt geben gleiche Produkte.

Zus. 2. Haben zwei gleiche Produkte einen gleichen Faktor, so sind auch die andern Faktoren einander gleich.

§. 40.

Lehrs. Gleiches und Ungleiches mit einander multiplizirt gibt Ungleiches, und zwar ist das größere Produkt auf Seite des größern Faktors.

Dat. $a = b$ und $m > n$.

Thes. $am > bn$.

Bew. Setzt man $m = n + x$, so folgt

$am = b(n + x)$, (§. 39.) oder

$am = bn + bx$, (§. 35.); mithin

$am > bn$ (A. E. VI. 3.).

Zus. Größeres mit Größerem multiplizirt gibt Größeres. Denn ist $a > b$ und $m > n$, so ist auch $am > bm$ (Lehrs.), ebenso ist $bm > bn$; daher $am > bn$ (A. E. VI. 6.).

Anm. Wird Größeres mit Kleinerem multiplizirt, so ist das Produkt unentschieden.

§. 41.

Lehrs. Das Produkt zweier Zahlen ist I. positiv, wenn sie gleiche, II. negativ, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Thes. I. $\begin{cases} (+a).(+b) = +ab. \\ (-a).(-b) = +ab. \end{cases}$ II. $\begin{cases} (+a).(-b) = -ab. \\ (-a).(+b) = -ab. \end{cases}$

Bew. I. Daß $(+a).(+b) = +ab$ geht unmittelbar aus §. 28. Zus. 1. hervor.

Mit wiederholter Anwendung von §. 28, 2., dann §. 36. und §. 38, II. erhält man

$$(-a).(-b) = (0-a).(-b) = 0.(-b) - a.(-b)$$
$$= 0 - a(0-b) = 0 - (a.0 - ab)$$
$$= 0 - (0 - ab) = 0 - (-ab) = + ab. \text{ (§. 30.)}$$

II. Es ist $(-a).(+b) = (0-a).b = b.0 - ab = -ab$. Ebenso ergibt sich $(+a).(-b) = -ab$.

Der Lehrsatz wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „Gleiche Zeichen geben (bei der Multiplikation) Plus, ungleiche Minus.“ [Signa eadem dant plus, signa diversa minus.]

Zus. 1. Das Zeichen des Produktes hängt von dem des Multiplikators ab; es erhält nämlich, wenn der Multiplikator a) positiv ist, dasselbe Zeichen b) wenn er negativ ist, das entgegengesetzte Zeichen des Multiplikands. Denn es ist (nach dem Lehrs.) $(\pm)a \,.\, (+b) = \pm ab$, $(\pm a) \,.\, (-b) = \mp ab$.

Zus. 2. Bei einem Produkte von mehr als zwei Faktoren ist das Zeichen durch die Anzahl der negativen Faktoren bedingt; ist diese a) eine gerade, so ist das Produkt positiv, ist sie b) eine ungerade, so ist es negativ.

Zus. 3. Jede negative Zahl läßt sich betrachten als ein Produkt aus derselben absoluten Zahl und der negativen Einheit, d. h. es ist $-a = -1 \,.\, a$.

§. 42.

Lehrs. Zusammengesetzte Ausdrücke werden multiplizirt, wenn man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multiplizirt, und die erhaltenen Partialprodukte mit dem gehörigen Vorzeichen algebraisch addirt.

Thes. $(a \pm b)(m \pm n) = am \pm bm \pm an \pm bn$.

Bew. Man habe das Produkt $(a+b)(m+n)$ zu entwickeln; so wird, wenn man zuerst den einen Faktor z. B. $(a+b)$ als eine Zahl betrachtet

$$(a+b)(m+n) = (a+b)m + (a+b)n \text{ (§. 35.); also}$$
$$= am + bm + an + bn.$$

Ebenso ergibt sich mit Anwendung von §. 36.:

$$(a+b)(m-n) = am + bm + an - bn, \text{ und}$$
$$(a-b)(m-n) = am - bm - an + bn.$$

Zus. Das Produkt mehrerer zusammengesetzter Ausdrücke wird auf dieselbe Art gefunden, indem man zuerst das Produkt von zweien sucht, dieses dann mit dem dritten Faktor u. s. w. multiplizirt. So wird z. B. $(a+b)(c-d)(m-n) = (ac+bc-ad-bd).(m-n) = acm + bcm - adm - bdm - acn - bcn + adn + bdn$.

Anm. Ein Produkt, in welchem einer oder mehrere Faktoren zusammengesetzte Ausdrücke sind, wird ein zusammengesetztes Produkt genannt. Auch bleibt das Multiplikationszeichen zwischen compleren Faktoren in der Regel weg.

§. 43.

Erkl. 1. Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren pflegt man kürzer dadurch zu bezeichnen, daß man den Faktor nur ein-

mal schreibt, und rechts über denselben mit etwas kleinerer Schrift jene Zahl setzt, welche anzeigt, wie oft derselbe stehen sollte. So schreibt man z. B. statt a . a . a . a oder aaaa kurz a^4, ebenso 5^3 statt 5 . 5 . 5; und um anzudeuten, daß a unbestimmt oft, etwa n mal als Faktor zu setzen sei, a^n.

2. Ein Ausdruck von der Form a^n, der also ein Produkt von n gleichen Faktoren, deren jeder a ist, bezeichnet, wird eine Potenz, a deren Grundzahl, Basis oder Wurzel, und n ihr Exponent oder der Grad der Potenz genannt. Man liest: „a mit dem Exponenten n, oder a in der n^{ten} Potenz, oder kürzer a in der n^{ten}, oder a der n^{ten}, auch a hoch n."

3. Hat eine Zahl keinen Exponenten, so ist die Einheit als solcher zu verstehen, d. h. es ist $a = a^1$; ebenso ist $5b = 5^1 . b^1$ u. s. w. Die zweite Potenz einer Zahl, d. i. $a^2 = aa$, wird gewöhnlich ihr Quadrat, die dritte, $a^3 = aaa$, ihr Kubus oder Würfel genannt.

4. Folgen die Glieder eines zusammengesetzten Ausdruckes so auf einander, daß die spätern entweder immer niedrigere oder höhere Potenzen einer darin vorkommenden Grundzahl enthalten, so heißt der Ausdruck nach Potenzen dieser Basis geordnet, und zwar im ersten Falle nach fallenden, im zweiten nach steigenden Potenzen. So ist z. B. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 8ab^3 + 10b^4$ nach Potenzen geordnet, und zwar nach fallenden von a oder nach steigenden von b.

Zus. 1. Jede Potenz von 1 ist wieder 1; und umgekehrt kann man die Einheit als Potenz mit beliebigem Exponenten betrachten. Denn es ist $1^n = 1 . 1 . 1 . 1 \ldots . = 1$.

Zus. 2. Jede Potenz von 10 besteht aus 1 mit so vielen Nullen, als der Exponent Einheiten enthält, und umgekehrt ist jede aus 1 und angehängten Nullen bestehende Zahl die sovielte Potenz von 10, als die Anzahl der Nullen beträgt. Denn es ist z. B.

$$10^1 = 10,$$
$$10^2 = 10 . 10 = 100,$$
$$10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000 \text{ u. s. w.}$$

§. 44.

Lehrs. Multiplizirt man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz, so erhält man die Differenz der Quadrate beider Zahlen.

Thes. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Bew. Wird die Multiplikation nach §. 42. ausgeführt, so folgt

$$(a+b)(a-b) = aa + ab - ab - bb, \text{ mithin}$$
$$= a^2 - b^2 \text{ (§. 31. Zus. 4.)}$$

Zus. Die Differenz zweier Quadrate läßt sich (umgekehrt) stets auflösen in ein Produkt aus der Summe und Differenz ihrer Wurzeln.

§. 45.

Lehrs. Potenzen derselben Grundzahl werden multiplizirt, wenn man der gemeinschaftlichen Basis die Summe der Exponenten als neuen Exponenten gibt.

Thes. $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Bew. Vermöge des Begriffes der Potenz soll a zufolge der Exponenten m mal und dann noch n mal, also im Ganzen $(m+n)$ mal als Faktor gesetzt werden; somit ist $a^m . a^n = a^{m+n}$. Z. B. $a^2 . a^3 = aa . aaa = aaaaa = a^5 = a^{2+3}$; ebenso wird

$$(a \pm b)^3 . (a \pm b) = (a \pm b)^3 . (a \pm b)^1 = (a \pm b)^4.$$

Zus. Eine Potenz, deren Exponent eine Summe ist, läßt sich (umgekehrt) auflösen in ein Produkt zweier (oder mehrerer) Potenzen, welche dieselbe Grundzahl haben, und deren Exponenten die einzelnen Summanden sind.

Demnach kann eine Potenz mit bestimmtem Exponenten mannigfach aufgelöst werden. So ist z. B. $a^7 = a^6.a = a^5.a^2 = a^4.a^3$.

§. 46.

Aufg. Einfache Ausdrücke mit einander zu multipliziren.

Aufl. u. Bew. Da allgemeine Zahlen als multiplizirt betrachtet werden, wenn sie ohne Zeichenverbindung (§. 33. 3. u. §. 37. Zus. 2.) neben einander stehen (wobei gewöhnlich die alphabetische Ordnung beobachtet wird); so sollen nur nachfolgende praktische Regeln zur Beobachtung gegeben werden:

1) Enthalten die Faktoren verschiedene Buchstaben, so multi-

plizire man ihre bestimmten Koëffizienten (wenn sie solche bei sich haben) in beliebiger Ordnung, und reihe an das Produkt derselben ohne ein dazwischengesetztes Zeichen die Buchstabengrößen. Dabei ist noch bezüglich des Vorzeichens des Produktes §. 41. zu berücksichtigen. Z. B.

I. $2a^2 \times 3b \times 5cd = 30a^2bcd$.

II. $5a^3b^2 \times -3cd \times 7 \times -2mn = + 210a^3b^2cdmn$.

2) Enthalten die Faktoren auch Potenzen derselben Basis, so werden diese nach §. 45. behandelt, und im Uebrigen wie oben verfahren. Z. B.

I. $a^4 \times 3a^3b \times 4a^2b^2 \times 5ab^3 \times 6b^4 = 360a^{10}b^{10}$.

II. $3ab^4 \times -6ab^3 \times 4a^2b = -72a^4b^8$.

Zus. 1. Die Multiplikation eines Polynoms durch ein Monom reduzirt sich nach §. 35. und §. 36. auf das Vorige. Z. B.

$$(1 - 2a + 3a^2 - 4a^3) . 5a^2 = 5a^2 - 10a^3 + 15a^4 - 20a^5.$$

Zus. 2. Kommen in einer algebraischen Summe Glieder vor, welche zusammengesetzte Produkte sind, so kann dieselbe durch Auflösung der Parenthesen in eine andere verwandelt werden, die nur einfache Produkte als Glieder hat. Ergeben sich hiebei gleichartige Glieder, so lassen sich diese (nach §. 32.) reduziren. Z. B.

$$8a^2 - 2a(3a + 4b) - b^2 + 5b(2a - b) = 8a^2 - 6a^2 - 8ab - b^2 + 10ab - 5b^2 = 2a^2 + 2ab - 6b^2.$$

§. 47.

Aufg. Das Produkt von Polynomien, deren Glieder Potenzen derselben Grundzahl enthalten, in möglichst reduzirter Form zu finden.

Aufl. u. Bew. Man verfährt hiebei, um auf dem einfachsten Wege (§. 42. befolgend) zum Resultate zu gelangen, gewöhnlich nach folgenden praktischen Regeln:

1) Man ordnet die Glieder der Faktoren übereinstimmend nach den Potenzen einer gemeinschaftlichen Grundzahl; setzt dann

2) den Multiplikator unter den Multiplikand, zieht unter ersterm eine Querlinie, multiplizirt nun (von der Linken gegen die Rechte) mit jedem Gliede des Multiplikators jedes Glied des Multiplikands, schreibt das jedesmalige erste Partialprodukt unter

jenes Glied des Multiplikators, von welchem es herrührt, und reiht daran die übrigen. Dadurch kommen in der Regel

3) die gleichartigen Partialprodukte unter einander zu stehen, welche jetzt nur noch (nach §. 32.) zu reduziren sind.

4) Bezüglich der Zeichen beachtet man am besten die Regel §. 41. Zus. 1. — Z. B. In dem Produkte $(2a^3-3a^2b-ab^2+4b^3)(a^2-4ab+3b^2)$ sind die Glieder bereits nach fallenden Potenzen von a (oder steigenden von b) geordnet; die Rechnung stellt sich somit obigen Regeln entsprechend also:

$$\begin{array}{l} 2a^3-3a^2b-ab^2+4b^3 \\ \quad a^2-4ab+3b^2 \\ \hline 2a^5-3a^4b-a^3b^2+4a^2b^3 \\ \quad\;\; -8a^4b+12a^3b^2+4a^2b^3-16ab^4 \\ \qquad\qquad +6a^3b^2-9a^2b^3-3ab^4+12b^5; \end{array}$$

also das Produkt

$$=2a^5-11a^4b+17a^3b^2-a^2b^3-19ab^4+12b^5.$$

IV. Kap. Division.

§. 48.

Erkl. 1. Eine Zahl durch eine andere dividiren oder theilen heißt eine dritte Zahl finden, welche mit der letztern multiplizirt die erstere als Produkt gibt.

Die zu dividirende Zahl wird Dividend, jene, durch welche getheilt wird, Divisor oder Theiler, die gesuchte Zahl Quotient oder Quotus genannt. Dividend und Divisor heißen auch Glieder des Quotienten.

2. Das Zeichen der Division ist entweder „:" welches zwischen die Glieder gesetzt wird, oder ein Querstrich „—", über den der Dividend und unter welchen der Divisor geschrieben wird. Beide Zeichen werden mit „dividirt oder getheilt durch", das letztere auch mit „gebrochen durch" übersetzt.

3. Die allgemeine Form eines Quotienten, wenn a den Dividend, b den Divisor bezeichnet, ist a : b oder $\frac{a}{b}$. In der letztern Form nennt man den Quotienten gewöhnlich einen Bruch, dann den Dividend a den Zähler, den Divisor b den Nenner

desselben. Auch vertritt der Querstrich (**Bruchzeichen** genannt) die Stelle der Klammern. Z. B. $(a+b):(m-n) = \frac{a+b}{m-n}$.

4. Ein Quotient, dessen Dividend und Divisor beziehungsweise dem Divisor und Dividend eines andern gleich sind, wird der **umgekehrte** oder **reciproke Werth** des letztern genannt.

Zus. 1. Der Quotient zweier Zahlen mit dem Divisor multiplizirt, gibt den Dividend, d. h. es ist $(a:b) . b = a$. (Nach dem Begriffe der Division).

Zus. 2. Wird das Produkt zweier Zahlen durch eine von ihnen dividirt, so erhält man die andere als Quotus, d. h. $ab : b = a$. Denn der Divisor b und der Quotient a geben den Dividend ab zum Produkte.

Zus. 3. Eine Zahl bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man sie entweder a) durch irgend eine andere dividirt, und den Quotus mit derselben Zahl multiplizirt, oder b) mit einer Zahl multiplizirt und das Produkt durch eben diese Zahl dividirt. (Umkehrung der Zuss. 1. und 2.).

Zus. 4. Jede Zahl läßt sich in einen Quotienten von gegebenem Divisor verwandeln (Zus. 3. b.).

Anm. Die Division ist nur eine abgekürzte Subtraktion; sie untersucht, wie oft der Divisor sich vom Dividend abziehen lasse; ferner ist sie der Gegensatz der Multiplikation, indem sie aus dem Produkte zweier Faktoren und dem einen von ihnen den andern finden lehrt.

§. 49.

Lehrs. Eine Summe oder Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jedes Glied der erstern durch die letztere dividirt, und die Quotienten addirt oder subtrahirt.

Thes. $(a \pm b) : m = a : m \pm b : m$.

Bew. Ist der Quotient richtig, so muß er mit dem Divisor m multiplizirt den Dividend geben. Nun ist aber

$$(a : m \pm b : m) . m = (a : m)m \pm (b : m)m \quad (\text{§. 35. und §. 36.})$$
$$= a \pm b \quad (\text{§. 48. Zus. 1.}).$$

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) die Summe oder Differenz zweier Quotienten mit einerlei Divisor, wenn man die Summe oder Differenz der Dividende durch den gemeinsamen Divisor theilt.

Zus. 2. Der Lehrsatz sowohl, als Zus. 1. ist auch auf jede arithmetische Summe von beliebig vielen Posten, sowie auf jede algebraische anwendbar (§. 31. Zus. 1.).

§. 50.

Lehrs. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man nur einen Faktor desselben durch sie dividirt und den Quotus mit dem andern Faktor multiplizirt.

Thes. $ab : m = (a : m) . b = (b : m) . a.$

Bew. Multiplizirt man den Quotienten $(a : m)b$ mit dem Divisor m, so folgt

$$(a : m)b \times m = ((a : m) . m)b \text{ (§. 37.)}$$
$$= a . b = ab \text{ (§. 48. Zus. 1.)}.$$

Zus. 1. Ein Quotient wird (umgekehrt) mit einer Zahl multiplizirt, wenn man den Dividend mit ihr multiplizirt, und das Produkt durch den Divisor theilt.

Zus. 2. Ist eine Zahl mit einer andern zu multipliziren und durch eine dritte zu dividiren, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dieß geschieht. Denn es ist $(a . b) : m = (a : m) . b.$

§. 51.

Lehrs. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Dividend durch sie theilt und den erhaltenen Quotus durch den Divisor dividirt.

Thes. $(a : b) : m = (a : m) : b.$

Bew. Es ist $\left(\frac{a}{m} : b\right) . m = \left(\frac{a}{m} . m\right) : b$, (§. 50. Zus. 1.)

$$= a : b \text{ (§. 48. Zus. 1.)}$$

Zus. Ist eine Zahl durch zwei andere nach einander zu dividiren, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dieses geschieht.

§. 52.

Lehrs. Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man sie zuerst durch einen Faktor und den erhaltenen Quotus durch den andern Faktor dividirt.

Thes. $a : mn = (a : m) : n.$

Bew. Ergibt sich wieder durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor. Es ist nämlich

$$((a:m):n) \cdot mn = \left[\left(\frac{a}{m}:n\right) \cdot n\right] m \text{ (§. 37. Zus. 2.)}$$

$$= \frac{a}{m} \cdot m = a \text{ (§. 48. Zus. 1.).}$$

Zus. 1. Ein Quotient wird (umgekehrt) durch eine Zahl dividirt, wenn man den Dividend durch das Produkt aus dem Divisor und der Zahl theilt (also den Divisor mit der Zahl multiplizirt.)

Zus. 2. Der Lehrs. gilt auch noch, wenn der Divisor ein Produkt von mehr als zwei Faktoren ist. Denn es ist z. B. $a:mnp = a:(mn \cdot p) = (a:(m \cdot n)):p = ((a:m):n):p.$

§. 53.

Lehrs. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man sie mit dem reciproken Werthe des letztern multiplizirt.

Thes. $a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{m}.$

Bew. Es ist $\frac{an}{m} : \frac{m}{n} = \frac{an}{m} \cdot (m : n)$

$$= \left(\frac{an}{m} \cdot m\right) : n, \text{ (§. 50. Zus. 1.)}$$

$$= an : n = a \text{ (§. 48. Zuss. 1. u. 2.).}$$

Zus. 1. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man sie entweder a) mit dem Divisor multiplizirt und das Produkt durch den Dividend theilt, oder b) durch den Dividend theilt und den Quotus mit dem Divisor multiplizirt. Denn es ist

$$a : \frac{m}{n} = a \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{m} \text{ (§. 50. Zus. 1.)}$$

$$= \frac{a}{m} \cdot n \text{ (§. 50.).}$$

Zus. 2. Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplizirt, wenn man durch sie den Divisor theilt, und mit dem Quotus den Dividend dividirt (Umkehrung von Zus. 1. b). Denn

$$\frac{a}{m} \cdot n = a : \frac{m}{n} = \frac{a}{m : n}.$$

§. 54.

Lehrs. Zwei Quotienten werden mit einander multiplizirt, wenn man das Produkt der Dividende durch das der Divisoren dividirt.

Thes. $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$.

Bew. Es ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} \cdot m\right) : n$ (§. 50. Zus. 1.)

$$= \frac{am}{b} : n = \frac{am}{bn} \text{ (§. 52. Zus. 1.).}$$

Zus. 1. Zwei Produkte werden (umgekehrt) durch einander dividirt, wenn man je einen Faktor des Dividends durch je einen Faktor des Divisors theilt, und die erhaltenen Quotienten multiplizirt.

Zus. 2. Der Lehrsatz ist auch für mehr als zwei Quotienten giltig.

§. 55.

Lehrs. Zwei Quotienten werden durch einander dividirt, wenn man entweder I. den Dividendquotus mit dem reciproken Werthe des Divisorquotienten multiplizirt, oder II. den Quotienten der Dividende durch den der Divisoren dividirt.

Thes. I. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{bm}$. II. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a : m}{b : n}$.

Bew. I. Reduzirt sich, wenn man den Dividendquotienten als eine Zahl betrachtet auf §. 53. und §. 54.

II. Es ist $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : m\right) \cdot n$ (§. 53. Zus. 1. b)

$$= \frac{a : m}{b} \cdot n \text{ (§. 51.)}$$

$$= \frac{a : m}{b : n} \text{ (§. 53. Zus. 2.).}$$

§. 56.

Lehrs. Ein Quotient bleibt beständig, d. i. seinem Werthe nach ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit der nämlichen Zahl entweder I. multiplizirt oder II. dividirt.

Thes. I. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. II. $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$.

Bew. I. Es ist $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b} : m\right) . m$ (§. 48. Zus. 3.)

$= \frac{a}{bm} . m$ (§. 52. Zus. 1.)

$= \frac{am}{bm}$ (§. 50. Zus. 1.).

II. Ergibt sich mit Anwendung von §. 51. und §. 53. Zus. 2. auf dieselbe Weise.

Zus. 1. Sind zwei Produkte, welche einen gleichen Faktor haben, durch einander zu dividiren, so kann man diesen weglassen (Umkehrung von I.).

Zus. 2. Zwei Quotienten, welche denselben Divisor haben, werden durch einander dividirt, wenn man nur ihre Dividende durch einander theilt (Umkehrung von II.).

§. 57.

Lehrs. Ist in einem Quotienten I. der Divisor dem Dividend gleich, so ist der Quotus = 1; ist aber II. der Divisor 1, so ist der Quotus dem Dividend gleich.

Thes. I. $a : a = 1$. II. $a : 1 = a$.

Bew. Folgt unmittelbar durch Multiplikation des Quotus mit dem Divisor; denn es ist $1 . a = a . 1 = a$ (§. 38. 1.).

Der zweite Theil des Lehrsatzes wird gewöhnlich kurz so ausgesprochen: „Eins dividirt nicht."

Zus. Die Einheit läßt sich als beliebigen Quotienten mit einerlei Dividend und Divisor, ebenso jede Zahl als Quotienten aus sich selbst getheilt durch die Einheit darstellen.

§. 58.

Lehrs. Ist in einem Quotienten I. der Dividend Null, so ist auch der Quotus Null; ist aber II. der Divisor Null, so gibt es keinen Quotus.

Thes. I. $0 : a = 0$.

Bew. I. Da man statt 0 eine Differenz $m - m$ setzen kann, so ist $0 : a = (m - m) : a = m : a - m : a = 0$ (§. 26.).

II. Es müßte der Quotus mit dem Divisor multiplizirt eine von 0 verschiedene Zahl, nämlich a geben können, was unmöglich ist (§. 38. II.).

Zus. Sind Dividend und Divisor 0, so kann jede beliebige Zahl Quotient sein, dieser ist also unbestimmt. Denn es ist $a \,.\, 0 = b \,.\, 0 = c \,.\, 0 \ldots\ldots = 0$.

Anm. Dient das Zeichen 0 nur als Stellvertreter einer unendlich kleinen Zahl, so ist $a : 0 = \infty$.

§. 59.

Lehrs. Gleiches durch Gleiches dividirt gibt Gleiches (d. i. gleiche Quotienten).

Dat. $a = b$ und $m = n$.

Thes. $a : m = b : n$.

Bew. Ganz wie §. 11.

Zus. Haben (umgekehrt) zwei gleiche Quotienten gleiche Dividenden oder Divisoren, so sind auch ihre Divisoren oder Dividenden gleich.

§. 60.

Lehrs. Ungleiches durch Gleiches dividirt gibt Ungleiches, und zwar ist der größere Quotus auf Seite des größern Dividendes.

Dat. $a > b$ und $m = n$.

Thes. $a : m > b : n$.

Bew. Setzt man $a = b + x$, so wird $a : m = (b + x) : n$ (§. 59.) oder $a : m = b : n + x : n$; mithin $a : m > b : n$.

Zus. Bei ungeändertem Divisor ist der Quotient um so größer, je größer der Dividend ist.

§. 61.

Lehrs. Gleiches durch Ungleiches getheilt gibt Ungleiches, und zwar ist auf Seite des größern Divisors der kleinere Quotus.

Dat. $a = b$ und $m > n$.

Thes. $a : m < b : n$.

Bew. Angenommen es sei $a : m = x$ und $b : n = y$, so ist $a = mx$ und $b = ny$, und (wegen $a = b$) $mx = ny$. Da nun $m > n$ ist, so kann weder $x = y$ (§. 40.), noch auch $x > y$ sein (§. 40. Zus.); also ist $x < y$, d. i. $a : m < b : n$.

Zus. 1. Größeres durch Kleineres dividirt gibt Größeres, und Kleineres durch Größeres getheilt Kleineres. Denn es ist, wenn $a > b$ und $m < n$ ist, $a : m > b : m$ (§. 60.), ferner $b : m > b : n$ (Lehrs.); mithin $a : m > b : n$ (A. E. VI. 6.). Ebenso folgt, wenn $c < d$ und $m > n$ ist, $c : m < d : m$, dann $d : m < d : n$; also $c : m < d : n$.

Zus. 2. Bei demselben Dividend ist der Quotient um so größer, je kleiner der Divisor ist.

§. 62.

Lehrs. Der Quotient zweier Potenzen derselben Grundzahl ist einer Potenz der nämlichen Basis gleich, deren Exponent die Differenz zwischen dem Exponenten des Dividends und dem des Divisors ist.

Thes. $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Bew. Multiplizirt man den Quotienten mit dem Divisor, so wird

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} \text{ (§. 45.), d. i.}$$
$$= a^m \text{ (§. 17. Zus. 2.).}$$

Bezüglich der Exponenten können drei Fälle stattfinden; es kann nämlich $m \gtreqless n$ sein. Wenn nun

a) $m > n$, so ist $m - n$ eine positive Zahl;

b) $m = n$, so ist $m - n = 0$ u. $a^{m-n} = a^0$;

c) $m < n$, so ist $m - n = -(n - m)$ eine negative Zahl.

Der Satz ist jedoch für alle Fälle giltig; denn man erhält in allen den Dividend als Produkt aus dem Divisor und Quotus.

Zus. 1. Eine Potenz, deren Exponent eine Differenz ist, läßt sich (umgekehrt) verwandeln in einen Quotienten zweier Potenzen mit derselben Grundzahl, wobei der Minuend als Exponent des Dividends, der Subtrahend als Exponent des Divisors erscheint.

Zus. 2. Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist der Einheit gleich, d. h. $a^0 = 1$. Denn es ist $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m$ (Zus. 1.); nun ist aber $a^m : a^m = 1$ (§. 57. I.). Es ist somit auch $a^0 = 1$ (A. E. VI. 5.). — Die Nullte Potenz einer beliebigen Zahl ist demnach ein Symbol für 1.

Zus. 3. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist einem Quotienten gleich, dessen Dividend 1, dessen Divisor dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist, d. h. $a^{-m} = 1 : a^m$. Denn es ist $a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = 1 : a^m$ (Zus. 1. u. 2.).

Zus. 4. Die Fälle, welche bei der Multiplikation (vgl. §. 45.) und Division von Potenzen mit einerlei Basis bezüglich der Zeichen der Exponenten vorkommen können, enthalten folgende Gleichungen, in welchen der mittlere Ausdruck jedesmal das Resultat der beiden äußern ist:

a) $a^m \,.\, a^n = a^{m+n} = a^m : a^{-n}$

b) $a^m \,.\, a^{-n} = a^{m-n} = a^m : a^n$

c) $a^{-m} \,.\, a^n = a^{n-m} = a^{-m} : a^{-n}$ und

d) $a^{-m} \,.\, a^{-n} = a^{-(m+n)} = a^{-m} : a^n$.

§. 63.

Lehrs. Der Quotient zweier Zahlen ist positiv oder negativ, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. (Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.)

Thes. $\left\{\begin{array}{l|l} (+a):(+b) = +(a:b) & (+a):(-b) = -(a:b) \\ (-a):(-b) = +(a:b) & (-a):(+b) = -(a:b). \end{array}\right.$

Bew. Ergibt sich (nach §. 41.) durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor.

§. 64.

Aufg. Einfache Ausdrücke durch einander zu dividiren.

Aufl. u. Bew. Man beobachte mit Rücksicht auf die bisherigen Gesetze nachstehende Regeln:

1) Für den Fall, daß der Divisor genau im Dividend enthalten ist, d. h. der Quotient in Form einer ganzen Zahl sich darstellen läßt, oder, wie man zu sagen pflegt, die Division aufgeht oder sich hebt, theile man

a) den Koëffizienten des Dividenden durch den des Divisors (§. 50. und §. 52.),

b) lasse jene allgemeinen Zahlen, welche in beiden Gliedern des gegebenen Quotienten vorkommen, weg (§. 56. Zus. 1.),

c) schreibe jene Buchstabengrößen des Dividends, welche der Divisor nicht enthält (mit ihren Exponenten) in den Quotus (§. 50.),

d) verfahre mit Potenzen derselben Basis nach §. 62. — Z. B.

1) $32a^2bc : 8bc = 4a^2$.

2) $-54a^3b^2c : -9a^3b^2c = 6$.

3) $48a^4b^3c^2 : -16a^2bc = -3a^2b^2c$.

4) $-64a^4c(b+m)^3 : 4ac(b+m)^2 = -16a^3(b+m)$.

2) Läßt sich die Theilung nicht vollständig ausführen, also der Quotient nicht in Form einer ganzen Zahl finden, was der Fall ist, wenn Dividend und Divisor nebst gleichen auch verschiedene, oder lauter verschiedene allgemeine Zahlen enthalten, so verfährt man mit den erstern (gleichen allgem. Zahlen) nach Regel 1) und zeigt dann die Division der übrigen gewöhnlich in Bruchesform an. Z. B.

1) $9a^3bc : 7a^2d = 9abc : 7d = \frac{9abc}{7d}$.

2) $-5a^4bc^2 : 8a^3cm = -5abc : 8m = \frac{-5abc}{8m} = -\frac{5abc}{8m}$.

Enthält der Divisor eine Potenz derselben Basis mit größerm Exponenten als im Dividend, so gäbe die Division einen negativen Exponenten, den man aber mittelst §. 56. II. oder §. 62. Zus. 3. vermeiden kann. Z. B.

1) $25a^2b^5c^4 : 45a^4b^3c = \frac{25a^2b^2c^3}{45a^4} = \frac{25a^2b^2c^3 : 5a^2}{45a^4 : 5a^2}$

$= \frac{5b^2c^3}{9a^2}$.

2) $50ab : 5a^3 = 10a^{-2}b = 10b \cdot a^{-2} = 10b \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{10b}{a^2}$.

Zus. Die Division eines Polynoms durch ein Monom reduzirt sich nach §. 49. Zus. 2. auf die von einfachen Ausdrücken; mithin gelten hiefür dieselben Regeln. Es wird demnach z. B.

1) $(8a^4b^3 - 20a^3b^4 + 32a^2b^3) : 4a^2b^3 = 2a^2 - 5ab + 8$.

2) $(72a^3b^2 - 60a^4c^5 + 48ab^2c^3) : 12a^2b^3c = \frac{6a}{bc} - \frac{5a^2c^4}{b^3} + \frac{4c^2}{ab}$.

§. 65.

Aufg. Den Quotienten zweier zusammengesetzter Ausdrücke zu bestimmen.

Aufl. Ist von zwei gegebenen Polynomien das eine ein Produkt aus dem andern und einem dritten einfachen oder zusammengesetzten Ausdrucke, so findet man den letztern durch Division auf eine der Multiplikation entgegengesetzte, der Zifferrechnung aber ganz analoge Weise nach folgenden Regeln:

1) Man ordne Dividend und Divisor übereinstimmend nach Potenzen ein und derselben Grundzahl. Dann theile man

2) das erste Glied des Dividenden durch das erste des Divisors (nach §. 64.); so ist der Quotus das erste Glied des zu suchenden Quotienten. Mit diesem wird

3) der ganze Divisor (d. i. alle Glieder desselben) multiplizirt und das Produkt vom Dividend subtrahirt (mit verändertem Zeichen addirt). Bleibt kein Rest, so ist die Division vollzogen. Geht jedoch die Division nicht auf, so setze man

4) zum Reste die übrigen, oder auch nur soviele Glieder aus dem Dividend herab, daß er (wo möglich) deren ebensoviele als der Divisor hat. Diesen Ausdruck betrachte man

5) wieder als Dividend, theile (wie vorhin) sein erstes Glied durch das erste des Divisors, multiplizire mit dem Quotus, welcher das zweite Glied des zu suchenden Quotienten ist, wieder den ganzen Divisor, und subtrahire das Produkt vom Dividend. Hierauf wird

6) mit dem etwaigen Reste dieselbe Operation wie oben wiederholt und solange fortgesetzt bis die Division aufgeht. Die algebraische Summe der erhaltenen Partialquotienten ist der gesuchte Quotus.

Bew. Es sei der komplexe Dividend D, der Divisor d, die Partialquotienten $q_1, q_2, q_3 \ldots.$, so muß

$$D : d = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots. \text{ sein.}$$

Der Auflösung zufolge sind vom Dividend nach und nach die Produkte $dq_1, dq_2, dq_3 \ldots.$ subtrahirt worden; es ist somit

$$(((D - dq_1) - dq_2) - dq_3) - \ldots. = 0 \text{ oder}$$

$$D - (dq_1 + dq_2 + dq_3 + \ldots) = 0 \text{ (§. 20. Zus. 1.), also}$$

$$D = dq_1 + dq_2 + dq_3 + \ldots. \text{ (§. 48.), oder}$$

$$= d(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots.), \text{ (§. 35. Zus. 2.).}$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch d, so folgt

$$D : d = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots.$$

Beispiele:

I. $(15a^4b^3c^2 - 21a^3b^4c^4) : (5a^2bc - 7ab^2c^3) = 3a^2b^2c.$

$-15a^4b^3c^2 \mp 21a^3b^4c^4$

$\text{''} \quad \text{''}$

II. $(4a^6 - 9a^4b^2 + 44a^3b^3 - 16a^2b^4 + 25b^6) : (2a^3 - 3a^2b + 4ab^2 + 5b^3)$

$-4a^6 \mp 6a^5b \pm 8a^4b^2 \pm 10a^3b^3 \qquad = 2a^3 + 3a^2b - 4ab^2 + 5b^3$

$\text{''} \; +6a^5b - 17a^4b^2 + 34a^3b^3 - 16a^2b^4$

$\pm 6a^5b \mp 9a^4b^2 \pm 12a^3b^3 \pm 15a^2b^4$

$\text{''} \; -8a^4b^2 + 22a^3b^3 - 31a^2b^4 + 25b^6$

$\mp 8a^4b^2 \pm 12a^3b^3 \mp 16a^2b^4 \mp 20ab^5$

$\text{''} \; +10a^3b^3 - 15a^2b^4 + 20ab^5 + 25b^6$

$\pm 10a^3b^3 \mp 15a^2b^4 \pm 20ab^5 \pm 25b^6$

$\text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''}$

Zus. Dividirt man ein Monom (oder auch ein Polynom, das den gegebenen Divisor nicht als Faktor in sich enthält) durch einen zusammengesetzten Ausdruck, so geht die Division nie auf, es läßt sich jedoch auf die oben erklärte Weise eine beliebige Anzahl von Partialquotienten entwickeln. Wird die Operation einmal abgebrochen, so wird entweder der letzte Rest mit darunter geschriebenem Divisor als Bruch zum Quotus geschrieben, oder (was gewöhnlich ist) es werden dem letztern einige Punkte beigefügt, welche die Nichtvollendung der Rechnung anzeigen, und durch die Worte „und so fort" übersetzt werden. So erhält man z. B.

$$1 : (1 + 2a + a^2) = 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 + \frac{5a^4 + 4a^5}{1 + 2a + a^2}, \text{ oder}$$
$$= 1 - 2a + 3a^2 - 4a^3 + \ldots\ldots$$

Ein solcher Ausdruck, der eine unendliche Reihe von Gliedern enthält, wird ein Infinitinomium genannt.

Anm. Addition und Multiplikation sind direkte, Subtraktion und Division indirekte Zahlenverbindungen; ferner sind Addition und Subtraktion und ebenso Multiplikation und Division entgegengesetzte Operationen; die einen sowie die andern dienen sich gegenseitig zur Probe, d. i. zur Prüfung, ob das erlangte Resultat das richtige sei.

II. Abschnitt. Von der Theilbarkeit.

I. Kap. Theilbarkeit überhaupt.

§. 66.

Erkl. 1. Eine ganze Zahl heißt durch eine andere theilbar oder meßbar, wenn der Quotient aus der erstern durch die letztere wieder eine ganze Zahl ist. Man nennt in diesem Falle die erstere ein Vielfaches oder Multiplum der letztern, diese aber einen Divisor, einen Theiler oder ein Maß der erstern.

2. Sind zwei (oder mehrere) Zahlen durch ein und dieselbe dritte zugleich theilbar, so heißt diese ein gemeinschaftlicher Theiler, Divisor oder Faktor oder ein gemeinsames Maß derselben. Zahlen, die einen gemeinsamen Theiler haben, nennt man auch verwandte Zahlen.

3. Die Theilbarkeit einer Zahl a durch eine andere b wird im Folgenden durch $a : b \backsim gZ$ (gelesen: a dividirt durch b oder kurz „a durch b" von der Form einer ganzen Zahl) angedeutet.

Zus. 1. Jede durch eine andere theilbare Zahl enthält stets die letztere als Faktor in sich.

Zus. 2. Jede Zahl ist durch sich selbst und die Einheit theilbar.

Zus. 3. Das größte Maß einer Zahl ist sie selbst.

§. 67.

Lehrs. Sind zwei (oder mehrere) Zahlen durch dieselbe dritte Zahl theilbar; so ist es auch ihre Summe oder Differenz.

Dat. $a : m \backsim gZ$ und $b : m \backsim gZ$.

Thes. $(a \pm b) : m \backsim gZ$.

Bew. Da a und b durch m theilbar sind, so kann man $a : m = p$, also $a = mp$ und ebenso $b = mq$ setzen, wobei p und q ganze Zahlen sind. Daraus ergibt sich

$a \pm b = mp \pm mq$ (§. 11. u. §. 23.), oder

$= m(p \pm q)$, (§. 35. Zus. 2.); also auch

$(a \pm b) : m = m(p \pm q) : m$ (§. 59.)

$= p \pm q$ (§. 48. Zus. 2.); d. i.

$(a \pm b) : m \backsim gZ$.

Zus. 1. Wenn (umgekehrt) eine Zahl ein Maß der Summe oder Differenz zweier anderer und zugleich von einer dieser letztern ist, so ist sie auch ein Divisor der andern.

Zus. 2. Läßt eine Zahl durch eine andere getheilt einen Rest, so ist jedes Maß des Dividends und Divisors auch ein Maß des Restes, und jedes Maß des Divisors und des Restes auch ein Maß des Dividends. Denn gibt a durch b getheilt zum Quotus q und zum Reste r, so ist

$$1)\ a = bq + r \quad \text{und} \quad 2)\ a - bq = r.$$

Ist nun eine Zahl m ein Maß von a und b, so mißt sie auch die Differenz $a - bq$, d. i. r, und im andern Falle die Summe $bq + r$, d. i. a.

§. 68.

Lehrs. Ein Produkt ist durch eine Zahl theilbar, wenn es nur einer seiner Faktoren ist.

Dat. $a : m \sim gZ$.

Thes. $abc \ldots : m \sim gZ$.

Bew. Setzt man, da $a : m \sim gZ$ ist, $a : m = q$, also $a = mq$, so wird durch Substitution

$$abc \ldots = mqbc \ldots, \text{ und } abc \ldots : m = mqbc \ldots : m \text{ oder}$$
$$abc \ldots : m = qbc \ldots \text{ (§. 48. Zus. 2.); also}$$
$$abc \ldots : m \sim gZ.$$

Zus. 1. Ein Produkt ist durch jeden seiner Faktoren, sowie auch durch das Produkt einer beliebigen Anzahl derselben theilbar.

Zus. 2. Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so ist auch jedes Produkt der erstern durch die letztere theilbar.

§. 69.

Erkl. 1. Eine Zahl, welche nur durch sich selbst und die Einheit theilbar ist, nennt man eine absolute oder eine Primzahl an sich, auch eine einfache oder Stammzahl; jede andere dagegen eine zusammengesetzte.

2. Zahlen, welche (außer der Einheit) keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden relative oder Primzahlen unter sich genannt.

Zus. 1. Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich betrachten als ein Produkt von wenigstens zwei Faktoren, deren keiner 1 ist.

Zus. 2. Absolute Primzahlen sind stets auch Primzahlen unter sich.

Zus. 3. Ist eine Zahl durch zwei (oder mehrere) relative Primzahlen zugleich theilbar, so ist sie es auch durch das Produkt derselben (§. 66. Zus. 1. und §. 68. Zus. 1.).

Anm. Die absoluten Primzahlen zwischen 1 und 100 sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97.

§. 70.

Lehrs. Jede zusammengesetzte endliche Zahl läßt sich als ein Produkt von lauter Primzahlen betrachten.

Bew. Es sei irgend eine zusammengesetzte Zahl $N = ab$ (§. 69. Zus. 1.). Sind nun a und b nicht Primzahlen, so kann man aus demselben Grunde $a = \alpha\beta$ und $b = \gamma\delta$ setzen, wodurch $N = \alpha\beta\gamma\delta$ wird. Sind unter diesen Faktoren noch zusammengesetzte, so kann man diese wieder als Produkte darstellen, und bei so fortgesetztem Verfahren muß man endlich lauter einfache Faktoren für N erhalten; denn käme man immer wieder auf zusammengesetzte Zahlen, so wäre N ein Produkt von unendlich vielen Faktoren, mithin selbst unendlich, was der Voraussetzung widerspricht.

Zus. Wenn eine Zahl keine Primzahl unter einer bestimmten Grenze zum Maße hat, so ist sie auch durch keine zusammengesetzte unter jener Grenzzahl meßbar. Z. B. 221 ist durch keine Primzahl unter 13 theilbar; folglich kann sie es auch durch keine zusammengesetzte unter der Grenzzahl 13 sein (Lehrs.).

§. 71.

Lehrs. Ist eine Zahl (N) kleiner als das Quadrat einer andern (a^2), und ist dieselbe weder durch die zweite (a) noch durch eine andere Primzahl unter dieser zweiten theilbar; so ist sie selbst eine Primzahl.

Dat. $N < a^2$.

Bew. Es könnte N nur durch eine andere Primzahl $b > a$ theilbar sein. Dieß ist aber unmöglich; denn gesetzt, es sei $N : b = q \backsim gZ$; so hätte man, da $N < a^2$ und $b > a$ ist, $N : b < a$ (§. 61. Zus. 1.), oder $q < a$. Wegen $N : b = q$,

also N = bq wäre also q ein Maß von N, mithin N jedenfalls durch eine kleinere Primzahl als a theilbar (§. 70. Zus.), was gegen die Voraussetzung ist. Es ist somit N selbst eine Primzahl.

Zus. Eine Zahl ist daher eine Primzahl, sobald, nachdem durch keine der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Primzahlen die Division in dieselbe aufgegangen, ein Quotient erscheint, der kleiner ist, als der eben gebrauchte Divisor. Z. B. 409 ist durch keine der Primzahlen von 2 bis 23 theilbar, gibt aber durch 23 dividirt als ganzen Quotus 17, ist somit eine Primzahl.

§. 72.

Erkl. 1. Alle einfachen und zusammengesetzten Zahlen werden eingetheilt a) in gerade, welche den Faktor 2 enthalten oder durch 2 theilbar sind, b) in ungerade, welche durch die Zahl 2 nicht theilbar sind. Die allgemeine Form einer geraden Zahl ist 2n, die einer ungeraden 2n + 1 oder 2n — 1, wobei n jede beliebige ganze Zahl vorstellt.

2. Im dekadischen Zahlensysteme ist jede Zahl, deren Endziffer (rechts) eine Nulle ist, ein Produkt aus 10, läßt sich also allgemein unter der Form n . 10 oder 10n darstellen. Ebenso kann jede mit 2, 3, 4 .... Nullen schließende Zahl durch 100n, 1000n, 10000n ... ausgedrückt werden.

3. Jede dekadische Zahl von der Form ... vxyz, (wo jedoch vxyz kein Produkt, sondern nur die Ziffern der Zahl bedeuten) ist einer Summe von der Form .... v . 1000 + x . 100 + y . 10 + z, also von sovielen Summanden gleich, als sie Ziffern hat, und wobei die Posten Produkte sind, in welchen der eine Faktor eine der Ziffern, der andere aber 1 mit so vielen angehängten Nullen ist, als noch Ziffern (rechts) nachfolgen.

4. Die Summe der Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf deren Lokal- oder Stellenwerth (vgl. §. 3. 1.) nennt man Quersumme derselben.

5. Gewisse Merkmale oder Eigenschaften, aus denen die Theilbarkeit einer Zahl durch eine andere entnommen werden kann, heißen Kennzeichen der Theilbarkeit.

Anm. 1. Alle Primzahlen mit einziger Ausnahme von 2 sind ungerade.

Anm. 2. Bei den geraden Zahlen unterscheidet man bisweilen noch geradgerade und geradungerade, je nachdem sie durch 2 dividirt eine gerade oder eine ungerade Zahl als Quotus geben. Die allgemeine Form der erstern ist 4n, die der letztern $4n \pm 2$.

§. 73.

Lehrſſ. Die Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen hinsichtlich ihrer Verbindung sind folgende:

I. Die Summe oder Differenz zweier gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl.

Bew. Seien die beiden Zahlen a und b, und zwar $a = 2m$ und $b = 2n$, so folgt

$$a \pm b = 2m \pm 2n = 2(m \pm n),$$ d. i.

eine gerade Zahl, da sie den Faktor 2 enthält.

II. Die Summe oder Differenz zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

Bew. Setzt man $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$, so folgt

$$\begin{aligned} a + b &= (2m + 1) + (2n + 1) \\ &= 2m + 2n + 2 \\ &= 2(m + n + 1). \end{aligned}$$ Ebenso

$$\begin{aligned} a - b &= (2m + 1) - (2n + 1) \\ &= 2m - 2n = 2(m - n). \end{aligned}$$

III. Die Summe oder Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

Bew. Es sei $a = 2m$ und $b = 2n + 1$, so wird

$$\begin{aligned} a \pm b &= 2m \pm (2n + 1) \\ &= 2m \pm 2n \pm 1 \\ &= 2(m \pm n) \pm 1. \end{aligned}$$

IV. Das Produkt zweier gerader Zahlen ist stets eine gerade, das zweier ungerader eine ungerade Zahl.

Bew. a) Für $a = 2m$ und $b = 2n$ wird $ab = 4mn$. b) Ist $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$, so wird

$$\begin{aligned} ab &= (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 \\ &= 2(2mn + m + n) + 1. \end{aligned}$$

V. Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer eine gerade Zahl.

Bew. Es sei $a = 2m$ und $b = 2n + 1$, so folgt

$$ab = 2m(2n + 1) = 2(2mn + m).$$

VI. Der Quotient zweier gerader Zahlen kann (die Theilbarkeit vorausgesetzt) gerade oder ungerade sein.

Bew. Folgt mit Rücksicht auf §. 48. aus Nr. IV. und V.

VII. Der Quotient zweier ungerader Zahlen ist (die Theilbarkeit vorausgesetzt) ungerade.

Bew. Folgt aus Nr. IV.

VIII. Der Quotient einer geraden Zahl durch eine ungerade kann (die Theilbarkeit vorausgesetzt) nur eine gerade Zahl sein.

Bew. Ergibt sich aus Nr. V.

IX. Eine ungerade Zahl ist durch eine gerade Zahl nie theilbar.

Bew. Der Quotient kann weder eine gerade Zahl (Nr. IV.), noch eine ungerade sein (Nr. V.).

§. 74.

Lehrs. Die wichtigsten Kennzeichen der Theilbarkeit besonderer (dekadischer) Zahlen, welche in vielen Fällen großen Vortheil gewähren, sind folgende:

I. Jede Zahl ist durch 2 theilbar, wenn es ihre letzte Ziffer ist, dieselbe also mit 2, 4, 6, 8 oder 0 schließt.

Dat. $z : 2 \backsim gZ.$

Thes. $\ldots vxyz : 2 \backsim gZ.$

Bew. Löst man die gegebene Zahl (nach §. 72, 3.) in eine Summe auf, so erhält man $\ldots v \,.\, 1000 + x \,.\, 100 + y \,.\, 10 + z.$ Ob nun diese Summe durch 2 theilbar sein wird, hängt offenbar nur von dem letzten Gliede (z) ab, da alle vorhergehenden durch 2 theilbar sind.

II. Eine Zahl ist durch 3 theilbar, wenn es ihre Quersumme ist.

Dat. $(\ldots v + x + y + z) : 3 \backsim gZ.$

Thes. $\ldots vxyz : 3 \backsim gZ.$

Bew. Durch Auflösung erhält man wie vorhin

$$\begin{aligned} \ldots vxyz &= \ldots v \,.\, 1000 + x \,.\, 100 + y \,.\, 10 + z \\ &= \ldots v \,.\, 999 + v + x \,.\, 99 + x + y \,.\, 9 + y + z \\ &= (\ldots v \,.\, 999 + x \,.\, 99 + y \,.\, 9) + (\ldots v + x + y + z). \end{aligned}$$

In dieser Summe ist der erste Summand jedenfalls durch 3 theilbar; wenn also auch der zweite, d. i. $(\ldots v + x + y + z) : 3 \backsim gZ$ ist, so ist es auch die Summe, d. i. die gegebene Zahl.

III. Eine Zahl ist durch 4 theilbar, wenn es ihre beiden letzten Ziffern, als eine Zahl betrachtet, sind, oder wenn die Summe aus der doppelten vorletzten und der letzten Ziffer durch 4 theilbar ist.

Dat. $yz : 4 \sim gZ$, oder $(2y + z) : 4 \sim gZ$.

Thes. $\ldots vxyz : 4 \sim gZ$.

Bew. Es ist $\ldots vxyz = (\ldots v . 1000 + x . 100) + (y . 10 + z)$. Der erste Summand ist durch 4 theilbar; es kommt also nur auf den zweiten $(y . 10 + z)$ an, ob es auch dieser ist. Ferner ist

$$\ldots vxyz = \ldots . v . 1000 + x . 100 + y . 10 + z$$
$$= (\ldots . v . 1000 + x . 100 + 8y) + (2y + z);$$

mithin die Zahl durch 4 theilbar, wenn 4 in $2y + z$ aufgeht.

IV. Durch 5 ist jede Zahl theilbar, wenn es ihre letzte Ziffer ist, wenn also die Zahl mit 5 oder 0 endiget.

Dat. $z : 5 \sim gZ$.

Thes. $\ldots . vxyz : 5 \sim gZ$.

Bew. Ganz gleich mit Nr. I.; denn jede dekadische Einheit (10, 100, 1000 xc.) ist durch 5 theilbar.

V. Durch 6 ist jede gerade Zahl theilbar, welche es durch 3 ist (wenn sie also durch 2 und 3 theilbar ist).

Dat. $\ldots vxyz : 2 \sim gZ$ und $\ldots vxyz : 3 \sim gZ$.

Thes. $\ldots vxyz : 6 \sim gZ$.

Bew. Die Zahlen 2 und 3 sind relative Primzahlen; also die Behauptung (nach §. 69. Zus. 3.) richtig.

Zus. Jede durch 3 und 4 theilbare Zahl ist es auch durch 12, jede durch 3 und 5 theilbare durch 15.

VI. Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn ihre drei letzten Ziffern als eine Zahl betrachtet durch 8 theilbar sind.

Dat. $xyz : 8 \sim gZ$.

Thes. $\ldots . vxyz : 8 \sim gZ$.

Bew. $\ldots vxyz = \ldots v . 1000 + x . 100 + y . 10 + z$
$$= \ldots v . 125 . 8 + x . 100 + y . 10 + z.$$

Sind also die letzten drei Glieder dieser Summe durch 8 theilbar, so ist es die ganze Summe.

VII. Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 theilbar ist.

Dat. $(\ldots v + x + y + z) : 9 \sim gZ$.

Thes. . . . . vxyz : 9 ∾ gZ.

Bew. Ganz derselbe wie Nr. II.

Anm. Auf der Eigenschaft, daß jede Zahl sowie ihre Quersumme durch 9 dividirt denselben Rest gibt, beruht die sogenannte Neunerprobe.

VIII. Die Theilbarkeit einer Zahl durch 7, 11 oder 13 wird am einfachsten auf folgende Weise ermittelt: Man theile die gegebene Zahl (in Gedanken) von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu je zwei Ziffern, ergänze die erste (rechts stehende) Klasse durch Addition der entsprechenden Zahl zu einem Vielfachen des Divisors (7, 11 oder 13), addire das Zehnfache dieser Ergänzung zur Zahl der nächsten Klasse (oder addire die Ergänzung zur Zehnerziffer der nächsten Klasse); ergänze die hiedurch entstehende Zahl wieder zu einem Vielfachen des Divisors, und verfahre mit der Ergänzung wie vorhin. Geht man auf diese Art alle Klassen durch, und erhält zuletzt ein Vielfaches des Divisors, so ist die Zahl selbst durch ihn theilbar.

Soll z. B. angegeben werden, ob 41273682037 durch 7 theilbar sei, so gibt die Eintheilung 4,12,73,68,20,37. Wir sagen nun:

37, Ergänzung = 5; dann
50 + 20 = 70, " = 0,
0 + 68 = 68, " = 2,
20 + 73 = 93, " = 5,
50 + 12 = 62, " = 1,
10 + 4 = 14;

also die gegebene Zahl durch 7 theilbar.

Ebenso wird die Theilbarkeit durch 11 und 13 untersucht *).

Der Bew. für die Richtigkeit des Verfahrens beruht darauf, daß a) die Zahl 1001, also auch jedes Vielfache von ihr, durch 7, 11 und 13 theilbar ist (indem 7 . 11 . 13 = 1001), und b) daß

*) Bei dem Verfahren selbst lassen sich noch manche Vortheile anwenden, die man sich bei einiger Uebung sehr bald geläufig machen wird. Solche sind: Das Ueberspringen von Klassen, welche Vielfache des Divisors sind, das Ausstoßen solcher Vielfachen aus einzelnen oder allen Klassen, das Uebergehen oder Weglassen von 10fachen des Divisors (wenn die Additionen der Ergänzungen-Zahlen über 70, 110 oder 130 ergeben), die Ergänzungen zum nächstgelegenen Vielfachen des Divisors durch negative Zahlen u. s. f.

die Summe zweier Zahlen durch jede Zahl theilbar ist, durch welche es die einzelnen Summanden sind.

Anm. Das gewöhnlich für die Theilbarkeit einer Zahl durch 11 angegebene Kennzeichen ist, daß die Differenz zwischen den Quersummen der an den geraden und ungeraden Stellen stehenden Ziffern durch 11 theilbar sein muß.

II. Kap. Zerfällung.

§. 75.

Erkl. 1. Diejenigen einfachen oder Primzahlen, welche eine zusammengesetzte Zahl zum Produkte geben, heißen einfache oder Primfaktoren dieser Zahl, alle übrigen zusammengesetzte Faktoren. So ist z. B. 7 ein einfacher, 15 ein zusammengesetzter Faktor von 105.

2. Einen zusammengesetzten oder komplexen Ausdruck so darstellen, daß die Faktoren, aus denen er entstanden ist, sichtbar werden, heißt ihn zerfällen, zerlegen oder auflösen.

§. 76.

Aufg. Eine dekadische Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

Aufl. u. Bew. Man dividire die gegebene Zahl durch die kleinste Primzahl, durch welche sie theilbar ist, mit dem erhaltenen Quotienten und allen übrigen, welche sich nach und nach ergeben, verfahre man ebenso, bis man endlich auf einen Quotus kommt, der selbst eine Primzahl ist; dann ist das Produkt aus allen gebrauchten Divisoren und dem letzten Quotus der gegebenen Zahl gleich. Denn es muß durch diese Operation endlich ein Quotient erscheinen, der selbst eine Primzahl ist (§. 70.). Man kann hiebei nach folgendem Beispiele verfahren:

2	31416
2	15708
2	7854
3	3927
7	1309
11	187
	17

Es ist also:

$$31416 = 2.2.2.3.7.11.17$$
$$= 2^3.3.7.11.17.$$

§. 77.

Aufg. Algebraische Monomien zu zerfällen.

Aufl. u. Bew. Man zerfälle (nach §. 76.) ihren Zahlenkoëffizienten, und schreibe jeden Buchstabenausdruck so oft, als sein Exponent Einheiten hat. Denn die einfachen Faktoren algebraischer Monomien sind die Buchstabengrößen, die sie enthalten. Z. B.

$$45a^2b^3c = 3 . 3 . 5 . aabbbc; \text{ ebenso ist}$$

$$455ac^2(m + n)^2 = 5 . 7 . 13acc(m + n)(m + n).$$

§. 78.

Aufg. Ein algebraisches Polynom zu zerfällen, wenn alle Glieder desselben einen gemeinschaftlichen monomischen Faktor haben.

Aufl. u. Bew. Man dividire durch den gemeinschaftlichen Faktor jedes Glied des Polynoms, so ist die Summe der erhaltenen Partialquotienten der andere Faktor. Die Richtigkeit beruht auf §. 36. Zus. 2. Z. B. in dem Ausdrucke $8a^2 - 12ab + 4a$ enthalten alle Glieder den gemeinschaftlichen Faktor 4a. Nun ist aber

$$(8a^2 - 12ab + 4a) : 4a = 2a - 3b + 1, \text{ also}$$

$$8a^2 - 12ab + 4a = 4a(2a - 3b + 1).$$

Ebenso ergibt sich

$$24ab^4c^3 - 18a^3b^3c^2 + 6a^2b^2c = 6ab^2c(4b^2c^2 - 3a^2bc + a).$$

Zus. Der monomische Faktor läßt sich auch negativ nehmen, was nicht selten sogar vortheilhaft ist; z. B.

$$-10a^3b + 5ab^2 = -5ab(2a^2 - b).$$

§. 79.

Aufg. Summen oder Differenzen gleich hoher Potenzen zu zerfällen.

Aufl. u. Bew. Um einen Ausdruck von der Form $a^n \pm b^n$ zu zerfällen, berücksichtigt man, ob der Exponent n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

I. Ist in der Summe $(a^n + b^n)$ der Exponent n

a) eine gerade Zahl, so ist $a^n + b^n$ weder durch die Summe, noch durch die Differenz der Wurzeln, also weder durch $(a + b)$ noch durch $(a - b)$ theilbar, und kann daher (vorläufig) nicht zerfällt werden. (Vgl. §. 172. Anm. 2.)

b) Ist dagegen n ungerade, so ist $a^n + b^n$ stets durch $a + b$ theilbar. So findet man z. B.

$$(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2; \text{ daher ist}$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

II. Die Differenz $a^n - b^n$ ist in jedem Falle zerlegbar; denn sie ist durch $a - b$ immer, dagegen durch $a + b$ nur dann theilbar, wenn n eine gerade Zahl ist. Wenn also

a) n ungerade ist, so erhält man den andern Mitfaktor, indem man durch $a - b$ dividirt;

b) ist n gerade, so wendet man am einfachsten §. 44. Zus. an, was manchmal sogar öfter geschehen kann. Z. B.

$$16a^4 - b^4 = (4a^2 + b^2)(4a^2 - b^2)$$
$$= (4a^2 + b^2)(2a + b)(2a - b).$$

Soll der Ausdruck $a^6 - b^6$ zerfällt werden, so hat man

$a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$. Nun ist aber

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \text{ (Nr. I. b)}$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ (Nr. II. a); daher}$$
$$a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$$

Zus. 1. Der Fall II. b) kann auch noch Anwendung finden bei Ausdrücken von der Form $a^m - b^n$, also bei nicht gleich hohen Potenzen, wenn m und n gerade Zahlen sind. Z. B.

$$a^4 - 9b^2 = (a^2 + 3b)(a^2 - 3b)$$
$$4a^6 - 25b^4 = (2a^3 + 5b^2)(2a^3 - 5b^2).$$

Zus. 2. Die Summe oder Differenz gleich hoher Potenzen eines Binoms zeigt sich öfter erst, wenn beide Glieder von einem gemeinschaftlichen Faktor befreit worden; daher muß stets zuerst §. 78. berücksichtigt werden. Z. B.

$$63a^3b - 28ab^3 = 7ab\,(9a^2 - 4b^2)$$
$$= 7ab\,(3a + 2b)(3a - 2b).$$

§. 80.

Aufg. Ein Polynom zu zerfällen, in welchem (nach Beobachtung des §. 78.) nur einige Glieder einen gemeinschaftlichen monomischen Faktor enthalten.

Aufl. u. Bew. Man entferne zuerst den etwa vorhandenen allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor, nehme dann je zwei oder drei Glieder zusammen, und befreie sie von ihrem gemeinschaft-

lichen einfachen Faktor. Ergibt sich bei dieser Operation überall derselbe komplexe Mitfaktor, so läßt sich dieser wieder als gemeinschaftlicher Theiler aller herausgestellten einfachen Faktoren betrachten. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf wiederholter Anwendung von §. 36. Zus. 2. Z. B. in $8a^2+12ab-10ac-15bc$ haben die beiden ersten Glieder den Faktor $4a$, die beiden letztern $-5c$ gemeinschaftlich; es wird daher

$$8a^2 + 12ab - 10ac - 15bc = 4a(2a + 3b) - 5c(2a + 3b)$$
$$= (2a + 3b)(4a - 5c).$$

In dem Ausdrucke

$$24a^2c - 16abc + 8ac^2 - 18acd + 12bcd - 6c^2d$$

enthalten alle Glieder den Faktor $2c$; entfernt man diesen, so wird

$$24a^2c - 16abc + 8ac^2 - 18acd + 12bcd - 6c^2d$$
$$= 2c(12a^2 - 8ab + 4ac - 9ad + 6bd - 3cd)$$
$$= 2c[4a(3a - 2b + c) - 3d(3a - 2b + c)]$$
$$= 2c(3a - 2b + c)(4a - 3d).$$

§. 81.

Aufg. Einen algebraischen Ausdruck von drei Gliedern zu zerfällen (wenn es möglich ist).

Aufl. u. Bew. Soll ein dreigliedriger Ausdruck ein Produkt zweier Binomien sein, so müssen zwei Glieder dieses Produktes reduzirt worden sein; es handelt sich also nur darum (um den Ausdruck nach §. 80. behandeln zu können), das reduzirte Glied in die ursprünglichen zwei Glieder aufzulösen.

Man verfahre dabei, vorausgesetzt, daß ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor (falls er vorhanden) bereits beseitigt ist, nach folgenden Regeln:

1.) Ordne die Glieder des gegebenen Ausdruckes nach fallenden oder steigenden Potenzen, so daß das erste Glied positiv ist.

2.) Beobachte das Zeichen des dritten Gliedes. Ist dieses a) positiv, so ist das zweite Glied durch Addition entstanden, muß also seinem Zeichen gemäß in zwei übereinstimmende Summanden zerlegt werden. Ist es b) negativ, so ist das zweite Glied durch Subtraktion entstanden, ist also seinem Zeichen entsprechend in 2 entgegengesetzte Summanden aufzulösen.

3.) Zerfälle die Koëffizienten des ersten und dritten Gliedes, jeden in zwei Faktoren, und untersuche, wie je 2 dieser Faktoren, wechselseitig zu Produkten verbunden, nach der zweiten Regel den Koëffizienten des mittlern Gliedes als Summe oder Differenz geben.

Einige Beispiele werden das Verfahren einleuchtend machen:

I. Man zerfälle den geordneten Ausdruck $12a^2+28ab+15b^2$. Das dritte und zweite Glied sind positiv, also das letztere eine Summe von 2 positiven Summanden. Ferner ist $12 = 2.6$ und $15 = 3.5$; verbindet man nun 2 und 5, dann 6 und 3, so ist $2.5 + 6.3 = 10 + 18 = 28$; wir setzen daher

$$28ab = 10ab + 18ab, \text{ und erhalten}$$

$$\begin{aligned} 12a^2 + 28ab + 15b^2 &= 12a^2 + 10ab + 18ab + 15b^2 \\ &= 2a(6a + 5b) + 3b(6a + 5b) \\ &= (6a + 5b)(2a + 3b). \end{aligned}$$

Hätte man oben 2 und 3, dann 6 und 5 verbunden, so würde man $2.3 + 6.5 = 36$, also nicht den Koëffizienten des zweiten Gliedes erhalten haben; ebenso wenig, wenn man anfangs $12 = 3.4$ oder $12 = 1.12$ gesetzt hätte.

II. In $20a^2 - 33ab + 7b^2$ ist 33ab eine Summe zweier negativer Summanden, dann $20 = 4.5$ und $7 = 1.7$, ferner $4.7 + 1.5 = 33$; also wird

$$\begin{aligned} 20a^2 - 33ab + 7b^2 &= 20a^2 - 28ab - 5ab + 7b^2 \\ &= 4a(5a - 7b) - b(5a - 7b) \\ &= (5a - 7b)(4a - b). \end{aligned}$$

III. In $32a^2 + 12ab - 9b^2$ ist das dritte Glied negativ, also das zweite durch Subtraktion entstanden; ferner ist $32 = 4.8$ und $9 = 3.3$, dann $3.8 - 3.4 = 12$; also

$$\begin{aligned} 32a^2 + 12ab - 9b^2 &= 32a^2 + 24ab - 12ab - 9b^2 \\ &= 8a(4a + 3b) - 3b(4a + 3b) \\ &= (4a + 3b)(8a - 3b). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art findet man auch

IV. $15a^2 - 14ab - 8b^2 = (5a + 2b)(3a - 4b)$.

Zus. Hat das erste oder das dritte Glied keinen Koëffizienten, so ist die Zerfällung noch leichter. Z. B. in $a^2 + 2ab - 35b^2$ ist $35 = 7.5$, ferner $7 - 5 = 2$; also

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab - 35b^2 &= a^2 + 7ab - 5ab - 35b^2 \\ &= a(a + 7b) - 5b(a + 7b) \\ &= (a + 7b)(a - 5b). \end{aligned}$$

§. 82.

Aufg. Alle Zahlen zu finden, durch die eine gegebene Zahl theilbar ist.

Aufl. u. Bew. Man zerfälle die gegebene Zahl in ihre einfachen Faktoren, und verbinde diese auf alle möglichen Arten zu zweien, dreien u. s. w. durch Multiplikation; so hat man das Verlangte (§. 68. Zus. 1.).

Um alle Divisoren einer Zahl am leichtesten zu erhalten, verfährt man gewöhnlich auf folgende Art: Man schreibt ihre einfachen Faktoren in vertikaler Reihe unter einander, so daß der größte obenan steht, multiplizirt dann den ersten mit dem zweiten, und setzt das Produkt rechts neben letztern, hierauf multiplizirt man mit dem dritten, dann mit dem vierten u. s. f. alle vorausgehenden einfachen und zusammengesetzten Theiler. Z. B.

Man soll alle Divisoren der Zahl 2730. bestimmen. — Es ist 2730 = 2.3.5.7.13., und wir haben also:

13	
7	91,
5	65, 35, 455,
3	39, 21, 273, 15, 195, 105, 1365;
2,	26, 14, 182, 10, 130, 70, 910, 6, 78, 42, 546, 30, 390, 210, 2730.

Ebenso verhält es sich bei algebraischen Ausdrücken. So ist z. B. $12a^3 - 18a^2 - 12a = 2 \cdot 3a(2a + 1)(a - 2)$; daher erhält man folgende Theiler:

$2a + 1$	
$a - 2$	$2a^2 - 3a - 2$
a	$a(2a + 1)$; $a(a - 2)$; $a(2a^2 - 3a - 2)$
3	$3(2a + 1)$; $3(a - 2)$; $3(2a^2 - 3a - 2)$; $3a$; $3a(2a + 1)$; $3a(a - 2)$; $3a(2a^2 - 3a - 2)$.
2	$2(2a + 1)$; $2(a - 2)$; $2(2a^2 - 3a - 2)$; $2a$; $2a(2a + 1)$; $2a(a - 2)$; $2a(2a^2 - 3a - 2)$; 6; $6(2a + 1)$; $6(a - 2)$; $6(2a^2 - 3a - 2)$; $6a$; $6a(2a + 1)$; $6a(a - 2)$; $6a(2a^2 - 3a - 2)$.

Zus. Enthält eine Zahl denselben einfachen Faktor mehrmal, so braucht man, um Wiederholungen zu vermeiden, mit dem zweiten gleichen Faktor nur die unmittelbar vorhergehende

horizontale Reihe zu multipliziren, ebenso mit dem dritten u. s. f. Z. B.

$24 = 2^3 . 3$, und $225 = 3^2 . 5^2$; also

3		5	
2	6,	5	25,
2	4, 12,	3	15, 75,
2	8, 24.	3	9, 45, 225.

III. Kap. Vom gemeinschaftlichen größten Theiler und kleinsten Dividend.

§. 83.

Erkl. Unter größtem gemeinschaftlichem Divisor oder Maß versteht man die größte Zahl, durch welche zwei oder mehre gegebene Zahlen theilbar sind. Z. B. für die Zahlen 24 und 36 ist das größte gemeinschaftliche Maß 12; ebenso ab für abc und abd.

Zus. Das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen kann höchstens so groß sein, als die kleinste aus ihnen (§. 66. Zus. 3.); z. B. 7 für die Zahlen, 7, 28, 63.

§. 84.

Lehrs. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen wird nicht geändert, wenn man die eine oder andere mit einem nicht gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt oder dividirt.

Bew. Denkt man sich die beiden Zahlen in ihre Primfaktoren aufgelöst, und setzt die eine $N = abc$, die andere $M = abd$; so ist ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ab. Nehmen wir nun zwei relative Primzahlen p und q, und multipliziren N mit p, welches kein Faktor von M, und M mit q, welches kein Faktor von N ist; so erhalten wir abcp und abdq, und das größte gemeinschaftliche Maß ist auch jetzt noch ab. Dividiren wir ferner N durch c, das kein Faktor von M, und M durch d, welches kein Faktor von N ist, so haben die Quotienten ab und ab auch noch dasselbe größte gemeinschaftliche Maß, nämlich ab.

§. 85.

Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier oder mehrerer dekadischer Zahlen zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. I. Man zerfälle die gegebenen Zahlen (nach §. 76.) in ihre einfachen Faktoren, und verbinde von diesen jene, welche allen gegebenen Zahlen gemeinschaftlich sind (also bei Potenzen derselben Basis die niedrigste), durch Multiplikation; so ist ihr Produkt der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler. Ergeben sich bei der Zerfällung keine gemeinschaftlichen Faktoren, so sind die Zahlen relative Primzahlen (§. 69, 2.). Die Richtigkeit des Gesagten folgt aus §. 66. Zus. 1. Z. B.

1) Man bestimme das größte gemeinschaftliche Maß für 770 und 8316. Man erhält (nach §. 76.):

$$770 = 2 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11, \text{ und}$$
$$8316 = 2^2 \,.\, 3^3 \,.\, 7 \,.\, 11.$$

Der größte gemeinschaftliche Divisor ist also $2 \,.\, 7 \,.\, 11 = 154$.

2) Für die drei Zahlen: 726, 990 und 4620 findet man: $726 = 2.3.11^2$; $990 = 2.3^2.5.11$, und $4620 = 2^2.3.5.7.11$; also ist ihr größtes gemeinschaftliches Maß $2.3.11 = 66$.

3) Es ist $294 = 2.3.7^2$ und $7865 = 5.11^2.13$. Die Zahlen 294 und 7865 sind also, da sie keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, relative Primzahlen. — Einfacher und schneller erhält man den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen, ohne sie in ihre Primfaktoren zu zerfällen, durch folgende

Aufl. II. Man dividire die größere von ihnen durch die kleinere; bleibt hiebei

1) kein Rest, so ist die kleinere selbst der gesuchte größte Divisor; z. B. für 3430 und 245 ist 245 selbst das größte gemeinschaftliche Maß; denn es ist $3430 : 245 = 14$.

2) Bleibt jedoch ein Rest, so dividire man durch ihn den vorigen Divisor, und fahre auf diese Art fort, stets den eben gebrauchten Divisor durch den bei der Division durch ihn erhaltenen Rest zu theilen, bis die Division aufgeht. Der zuletzt gebrauchte Divisor ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß, und wenn derselbe 1 wird, so sind die Zahlen relative Primzahlen.

Die Operation läßt sich dadurch noch etwas erleichtern, daß man den jedesmaligen Quotienten über den Dividend und Divisor stellt, nach folgendem Beispiele, in welchem für 1205400 und 12177 das größte gemeinschaftliche Maß gesucht wird.

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{98}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{98}{\frown} & \\ 1205400 & : & 12177 & : & 12054 & : & 123. \\ \underline{109470} & & \underline{123} & & \underline{984} & & \\ \underline{12054} & & & & 〃 & & \end{array}$$

Die gegebenen Zahlen haben also 123 als größten gemeinschaftlichen Divisor.

In Bezug auf die Zahlen 87630 und 4321 erhält man

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & \overset{20}{\frown} & & \overset{3}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{3}{\frown} & & \overset{57}{\frown} & & \overset{3}{\frown} & \\ 87630 & : & 4321 & : & 1210 & : & 691 & : & 519 & : & 172 & : & 3 & : & 1\ ; \\ \overline{1210} & & \overline{691} & & \overline{519} & & \overline{172} & & \overline{3} & & \overline{22} & & & & \end{array}$$

dieselben sind also relative Primzahlen.

Bew. Man habe das größte gemeinschaftliche Maß für a und b zu suchen, und es sei $a > b$; ferner sei

$a : b = m$ der Rest c, so ist $a = bm + c$, dann
$b : c = n$ „ „ d, „ $b = cn + d$, ferner
$c : d = p$ „ „ 0, „ $c = dp$.

Substituirt man diese Werthe rückwärts, so wird

$$b = cn + d = dpn + d = d(np + 1), \text{ und}$$
$$a = bm + c = md(np + 1) + dp$$
$$= d[m(np + 1) + p].$$

Also lassen sich a und b durch den letzten Divisor d theilen (§. 68.).

Wäre d nicht das größte gemeinschaftliche Maß, so möge dieses $\delta > d$ sein.

Wir haben $a = bm + c$. Wäre nun a und b durch δ theilbar, so müßte es auch c sein (§. 67. Zus. 2.). Unter dieser Voraussetzung müßte dann aber auch, da $b = nc + d$ ist, d durch δ theilbar sein, was unmöglich ist, indem $\delta > d$. Somit ist d das größte gemeinschaftliche Maß für a und b.

Zus. 1. Soll der größte gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen bestimmt werden, so suche man ihn zuerst auf die oben angegebene Art für irgend zwei derselben, hierauf für den eben gefundenen Divisor und eine der andern (gegebenen) Zahlen auf dieselbe Weise, und fahre so bis zur letzten gegebenen Zahl fort. Der zuletzt gefundene Divisor ist das größte gemeinschaftliche Maß aller gegebenen Zahlen. Z. B. man habe die Zahlen 684, 1026 und 1995, so ergibt sich für 684 und 1026 als größtes Maß 342;

für dieses und 1995 findet man 57; somit ist 57 der gesuchte größte gemeinschaftliche Divisor.

Zus. 2. Werden zwei oder mehrere Zahlen durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividirt, so sind die Quotienten relative Primzahlen.

§. 86.

Aufg. Den größten gemeinschaftlichen Theiler algebraischer Ausdrücke zu finden.

Aufl. u. Bew. Wir unterscheiden hiebei folgende Fälle:

I. Sind die gegebenen Ausdrücke Monomien, so suche man für ihre Zahlen-Koëffizienten den größten gemeinschaftlichen Divisor nach §. 85. und reihe an diesen die allen gemeinsamen Buchstabengrößen mit den kleinsten in den gegebenen Ausdrücken vorkommenden Exponenten. Z. B.

$$39a^2bc = 3 \,.\, 13a^2bc \;;\; 65a^5b^3d = 5 \,.\, 13a^5b^3d \text{ und}$$
$$91a^6b^2cd = 7 \,.\, 13a^6b^2cd \;;$$

mithin das größte gemeinschaftliche Maß dieser Größen $13a^2b$.

II. Polynomien zerfälle man nach den frühern Regeln, wodurch sie Monomien werden, und verfahre dann wie oben. Z. B.

$$12a^3 + 6a^2 - 6a = 2 \,.\, 3a(a+1)(2a-1) \text{ und}$$
$$4a^3 - 4a = 2 \,.\, 2a(a+1)(a-1);$$

daher der größte gemeinschaftliche Divisor dieser Ausdrücke $2a(a+1)$.

III. Ohne Zerfällung findet man das größte gemeinschaftliche Maß zweier Polynomien (ganz analog §. 85.) durch Anwendung folgender Regeln:

a) Man ordne die gegebenen Polynomien nach den Potenzen eines gemeinschaftlichen Buchstaben.

b) Enthalten alle Glieder des einen oder andern Polynoms einen gemeinschaftlichen Faktor, der nicht auch ein Faktor des andern ist, so stelle man diesen heraus (§. 78.), lasse ihn geradezu weg (§. 84.), und dividire dann.

c) Ist der Koëffizient des ersten Gliedes von dem als Dividend betrachteten Polynom durch den des ersten im Divisor nicht theilbar, so multiplizire man den ganzen Dividend mit einer solchen Zahl, daß eine Theilung ohne Rest möglich wird; denn dadurch bleibt der größte gemeinschaftliche Theiler ungeändert (§. 84.). Z. B.

1) Es soll für die zwei (geordneten) Ausdrücke:

$$A = 5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \text{ und}$$
$$B = 3a^2 - 14ab + 15b^2$$

das größte gemeinschaftliche Maß bestimmt werden.

Wir multipliziren den Ausdruck A, damit sein erstes Glied durch $3a^2$ theilbar wird, mit 3, und theilen dann durch B; so wird

$$(15a^3 - 54a^2b + 33ab^2 - 18b^3) : (3a^2 - 14ab + 15b^2) = 5a$$
$$\underline{- 15a^3 \mp 70a^2b \pm 75ab^2}$$
$$\text{„} \quad + 16a^2b - 42ab^2 - 18b^3 = 2b\,(8a^2 - 21ab - 9b^2).$$

Da nun 2b kein Faktor von B ist, so lassen wir es weg, (§. 84.) und multipliziren $8a^2 - 21ab - 9b^2$, um das zweite Glied des Quotienten A : B zu erhalten, mit 3; so ergibt sich

$$(24a^2 - 63ab - 27b^2) : (3a^2 - 14ab + 15b^2) = 8$$
$$\underline{- 24a^2 \mp 112ab \pm 120b^2}$$
$$\text{„} \quad + 49ab - 147b^2 = 49b\,(a - 3b).$$

Da 49b wieder kein Faktor von B ist, so dividiren wir B durch (a — 3b), und erhalten

$(3a^2 - 14ab + 15b^2) : (a - 3b) = 3a - 5b$ (ohne Rest).

Somit ist also (a—3b) der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler.

2) Man habe das größte gemeinschaftliche Maß für

$$A = 21a^2 - 40ab + 32b^2,$$
$$B = 3a^2 - 10ab + 6b^2 \text{ zu suchen; so wird}$$
$$(21a^2 - 40ab + 32b^2) : (3a^2 - 10ab + 6b^2) = 7$$
$$\underline{- 21a^2 \mp 70ab \pm 42b^2}$$
$$\text{„} \quad + 30ab - 10b^2 = 10b\,(3a - b).$$

Ferner wird $(3a^2 - 10ab + 6b^2) : (3a - b) = a - 3b$, und als Rest bleibt $3b^2$.

Da nun $3b^2$ kein Faktor des letzten Divisors (3a — b) ist, so sind die gegebenen Ausdrücke relative Primzahlen.

Zus. Auf dieselbe Art findet man das größte gemeinschaftliche Maß mehrerer Polynomien, wenn man dabei mit Rücksicht auf §. 85. Zus. 1. verfährt.

§. 87.

Erkl. 1. Eine Zahl, welche durch mehrere andere zugleich theilbar ist, heißt ein gemeinschaftliches Vielfache, gemeinschaftlicher Dividend oder Dividuus der letztern.

2. Die kleinste Zahl, welche durch zwei oder mehrere gegebene Zahlen theilbar ist, nennt man ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache.

Zus. 1. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen kann nicht kleiner sein, als die größte aus ihnen.

Zus. 2. Ein größtes gemeinschaftliches Vielfache mehrerer Zahlen gibt es nicht; denn durch Multiplikation des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen können wir unendlich viele Zahlen bilden, welche alle durch die gegebenen theilbar sind (§. 68, Zus. 2.).

§. 88.

Aufg. Den kleinsten gemeinschaftlichen Dividend mehrerer gegebener Ausdrücke zu finden.

Aufl. u. Bew. I. Man löse dieselben in ihre einfachen Faktoren auf, multiplizire alle nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit einander, dann das Produkt derselben durch die höchste Potenz eines jeden vorkommenden gemeinschaftlichen Faktors, so ist das Resultat der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividuus (§. 66. Zus. 1.).

Sind die gegebenen Ausdrücke relative Primzahlen, so ist ihr Produkt selbst ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache. — Z. B.

1) Es ist $240 = 2^4 . 3 . 5$; $504 = 2^3 . 3^2 . 7$ und $396 = 2^2 . 3^2 . 11$; also ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache

$$2^4 . 3^2 . 5 . 7 . 11 = 55440.$$

2) Es ist $8 = 2^3$; $15 = 3 . 5$; $77 = 7 . 11$, also ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache $2^3 . 3 . 5 . 7 . 11 = 24 . 385 = 9240$.

3) Da $24a^3b^2cd = 2^3 . 3a^3b^2cd$, ferner

$$21a^2b(m^2 - n^2) = 3 . 7a^2b(m + n)(m - n), \text{ und}$$

$$150abc^2(m + n)^2 = 2 . 3 . 5^2abc^2(m + n)^2;$$

so ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Ausdrücke:

$$2^3 . 3 . 5^2 . 7a^3b^2c^2d(m + n)^2(m - n)$$
$$= 4200a^3b^2c^2d(m^3 + m^2n - mn^2 - n^3).$$

Die Zerfällung der Zahlenkoëffizienten wird gewöhnlich durch folgendes Verfahren umgangen und sehr vereinfacht:

a) Man läßt von den gegebenen Zahlen alle, welche Divisoren von andern gegebenen sind, weg; schreibt

b) die beibehaltenen in eine horizontale Reihe, und untersucht, ob nicht zwei oder mehrere ein gemeinschaftliches Maß haben. Ist dieses vorhanden, so schreibt man es zur Seite, dividirt damit, und merkt die Quotienten an, die nicht theilbaren aber läßt man ungeändert.

c) Wird dieses Verfahren so lange fortgesetzt, bis alle Quotienten absolute oder relative Primzahlen sind, so ist das Produkt aus den letztern in alle gebrauchten Divisoren der gesuchte kleinste Dividuus. Um z. B. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 8, 12, 15, 18, 20, 24, 33, 54, 66, 72, 90, 198 und 792 zu finden, braucht man es mit Weglassung aller andern nur für 20, 54, 90, 792 zu suchen. Wir schreiben also:

	20, 54, 90, 792
2	10, 27, 45, 396
2	5, 27, 45, 198
3	5, 9, 15, 66
3	5, 3, 5, 22
5	1, 3, 1, 22

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen ist demnach:

$2^2 . 3^3 . 5 . 22 = 4 . 27 . 110$
$= 11880.$

Aufl. II. Ohne Zerfällung erhält man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zweier oder mehrerer Zahlen auf folgende Weise:

a) Für zwei gegebene Größen suche man zuerst nach §. 85. oder §. 86. ihren größten gemeinschaftlichen Theiler, dividire durch diesen die eine von jenen Größen, und multiplizire mit dem erhaltenen Quotus die andere; so ist das Produkt der gesuchte Dividuus. Denn es sei m das größte gemeinschaftliche Maß für a und b, ferner $a : m = q$ und $b : m = r$, so ist $a = mq$ und $b = mr$. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache für mq und mr, also für a und b ist demnach $mqr = ar = bq$, oder wenn man statt r und q ihre Werthe setzt, $a . \frac{b}{m} = b . \frac{a}{m}$.

So findet man z. B. für 252 und 540 das größte gemeinschaftliche Maß 36. Ferner ist $252 : 36 = 7$, also der kleinste gemeinschaftliche Dividuus $7 . 540 = 3780$ $(= 252 . 15)$.

b) Für mehrere Zahlen wird das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gefunden, wenn man es zuerst nach a) für die beiden ersten sucht, hierauf für die gefundene Zahl und die dritte u. s. f. bis zur letzten gegebenen Zahl. Die zuletzt sich ergebende Zahl ist der gesuchte kleinste gemeinschaftliche Dividend. Z. B. für die Zahlen 18, 24, 27, 60 und 80 erhalten wir als kleinsten gemein-

schaftlichen Dividend 2160. Denn er ist

a) für 18 und 24, da 18 : 6 = 3, 3 . 24 = 72;
b) für 72 und 27, „ 27 : 9 = 3, 3 . 72 = 216;
c) für 216 und 60, „ 60 : 12 = 5, 5 . 216 = 1080;
d) für 1080 und 80, „ 80 : 40 = 2, 2 . 1080 = 2160.

III. Abschnitt. Von den Brüchen.

§. 89.

Erkl. 1. Unter einem Bruche oder einer gebrochenen Zahl versteht man im weitern Sinne jeden, im engern Sinne aber jenen Quotienten, dessen Dividend durch den Divisor nicht theilbar ist (vgl. §. 48.).

2. Die Benennungen der Bestandtheile eines Bruches, nämlich Zähler und Nenner, sowie die Bezeichnung und allgemeine Form desselben vgl. §. 48, 3.

3. Ein Bruch, dessen Zähler = 1 ist, wird ein Stammbruch genannt; er zeigt an, daß man die Einheit in soviele gleiche Theile, als der Nenner angibt, theilen, und einen dieser Theile nehmen soll.

Zus. 1. Der Werth eines Bruches, dessen Zähler und Nenner gleich sind, ist = 1 (§. 57.).

Zus. 2. Ist der Zähler eines Bruches kleiner, als der Nenner, so ist sein Werth kleiner als 1; denn wenn $a < b$, so ist auch $\frac{a}{b} < 1$ (§. 60.).

Zus. 3. Ist der Zähler größer als der Nenner, so ist der Werth eines Bruches > 1.

Zus. 4. Der Werth eines Bruches ist bei ungeändertem Nenner um so größer, je größer sein Zähler (§. 60. Zus.), dagegen um so kleiner, je größer bei ungeändertem Zähler sein Nenner ist (§. 61. Zus. 2.).

§. 90.

Erkl. Alle Brüche werden hinsichtlich ihrer Zähler und Nenner eingetheilt:

1) in eigentliche, deren Zähler nicht durch den Nenner theilbar ist. Diese werden wieder

a) echte oder wahre genannt, wenn der Zähler kleiner ist, als der Nenner,

b) unechte, wenn der Zähler größer ist, als der Nenner,

2) in uneigentliche, scheinbare, Schein- oder Formbrüche, wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners ist,

3) in reguläre oder einfache, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind,

4) in irreguläre, zusammengesetzte oder Bruchesbrüche, bei denen Zähler oder Nenner, oder beide zugleich selbst wieder Brüche sind.

Zus. Jede ganze Zahl läßt sich als (uneigentlicher) Bruch mit beliebigem Nenner darstellen, wenn man sie mit demselben zugleich auch multiplizirt (§. 48, Zus. 3.); folglich auch als Bruch mit dem Nenner 1 (§. 57. II.).

§. 91.

Erkl. 1. Macht man den Zähler eines Bruches zum Nenner, und den Nenner desselben zum Zähler, so heißt dieses den Bruch stürzen.

2. Der Werth eines gestürzten Bruches wird in Bezug auf den des gegebenen der umgekehrte oder reciproke Werth des Bruches genannt.

Zus. Der reciproke Werth einer ganzen Zahl ist 1 gebrochen durch eben diese Zahl (vgl. §. 90, Zus.).

§. 92.

Erkl. Alle Brüche werden in zwei Klassen eingetheilt

1) in gemeine oder gewöhnliche, welche was immer für Nenner haben können,

2) in besondere oder künstliche, die nur gewisse Nenner haben, nach denen sie auch benannt werden. Solche sind die Dezimalbrüche und die Kettenbrüche.

I. Kap. Von den gemeinen Brüchen.

§. 93.

Erkl. 1. Jeder Ausdruck, welcher aus einer ganzen und einer mit ihr durch $\pm$ verbundenen gebrochenen Zahl besteht, wird eine gemischte Zahl genannt, z. B. $a \pm \frac{b}{n}$; $7 + \frac{3}{8}$.

Bei besondern gemischten Zahlen wird das Zeichen $+$ weder geschrieben noch gelesen, man schreibt also z. B. statt $7 + \frac{3}{8}$ nur $7\frac{3}{8}$, und liest: Sieben (und) drei Achtel.

2. Die Verwandlung einer gemischten Zahl in einen Bruch nennt man den Bruch einrichten.

§. 94.

Aufg. Man soll I. eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln, und II. umgekehrt, einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl.

Aufl. I. Man multiplizire mit dem Nenner des Bruches die ganze Zahl, addire zum Produkte dessen Zähler, und schreibe der Summe den Nenner des Bruches unter. Z. B.

$$a \pm \frac{b}{n} = \frac{an \pm b}{n}.$$

Bew. Es ist $a = an : n$ (§. 90. Zus.), daher auch

$$a \pm \frac{b}{n} = \frac{an}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{an \pm b}{n} \text{ (§. 49. Zus. 1.)}.$$

Z. B. $9\frac{7}{8} = \frac{9 \cdot 8 + 7}{8} = \frac{79}{8}$.

II. Man dividire den Zähler des Bruches durch den Nenner, und addire den Rest zum Quotus. Denn ist $a > b$, so kann man $a = bn + c$ setzen; daher ist dann

$$\frac{a}{b} = \frac{bn + c}{b} = n + \frac{c}{b} \text{ (§. 49.)}.$$

Z. B. $\frac{75}{14} = \frac{70 + 5}{14} = 5 + \frac{5}{14} = 5\frac{5}{14}$.

§. 95.

Lehrs. Ein Bruch bleibt beständig, d. h. seinem Werthe nach ungeändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit der nämlichen Zahl multiplizirt oder dividirt.

Thes. $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a : n}{b : n}$.

Bew. Ist in §. 56. enthalten. — Z. B.

$$\frac{15}{24} = \frac{15 \,.\, 2}{24 \,.\, 2} = \frac{30}{48} = \frac{15 : 3}{24 : 3} = \frac{5}{8}.$$

Zus. Ein Bruch bleibt beständig, wenn man im Zähler und Nenner die Zeichen ändert. Denn es ist

$$\frac{m - a}{n - b} = \frac{(m - a) \,.\, -1}{(n - b) \,.\, -1} = \frac{-m + a}{-n + b} = \frac{a - m}{b - n}.$$

§. 96.

Erkl. 1. Einen Bruch unbeschadet seines Werthes durch andere Zahlen darstellen, heißt denselben auf andere Benennung bringen, und zwar a) erweitern, wenn dieses durch Multiplikation, b) vereinfachen, abkürzen oder reduziren, wenn es durch Division seines Zählers und Nenners (nach §. 95.) geschieht.

2. Von einem Bruche, dessen Zähler und Nenner relative Primzahlen sind, sagt man, er sei irreducibl oder auch auf die kleinste Benennung oder die einfachste Form gebracht.

§. 97.

Erkl. 1. Zwei oder mehrere Brüche heißen gleichnamig, wenn sie denselben Nenner haben, außerdem ungleichnamig.

2. Brüche unbeschadet ihres Werthes in andere mit demselben Nenner verwandeln, heißt sie gleichnamig machen, oder auf gleiche Benennung bringen.

3. Der Nenner, welchen gleichnamig zu machende Brüche erhalten sollen, wird gewöhnlich Haupt- oder Generalnenner genannt, und ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner der gegebenen Brüche, die in Bezug auf ihn spezielle Nenner heißen.

§. 98.

Aufg. Ungleichnamige Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

Aufl. u. Bew. Man suche (nach §. 88.) den Generalnenner, und erweitere dann jeden der gegebenen Brüche mit dem Quotienten, der sich aus der Division des Generalnenners durch seinen (speziellen) Nenner ergibt. Denn dadurch erhalten alle Brüche den Generalnenner als Nenner, und ihr Werth wird nicht geändert (§. 95.) Z. B. für $\frac{3a}{4b}$, $\frac{6m}{7b^2}$, $\frac{5n^2}{8ab}$ und $\frac{11a^2}{14bc}$ ist der Generalnenner $56ab^2c$, man erhält daher:

$$\frac{3a}{4b} = \frac{3a \,.\, 14abc}{4b \,.\, 14abc} = \frac{42a^2bc}{56ab^2c};$$

$$\frac{6m}{7b^2} = \frac{6m \,.\, 8ac}{7b^2 \,.\, 8ac} = \frac{48acm}{56ab^2c};$$

$$\frac{5n^2}{8ab} = \frac{5n^2 \,.\, 7bc}{8ab \,.\, 7bc} = \frac{35bcn^2}{56ab^2c};$$

$$\frac{11a^2}{14bc} = \frac{11a^2 \,.\, 4ab}{14bc \,.\, 4ab} = \frac{44a^3b}{56ab^2c}.$$

Zus. Hiernach läßt sich auch entscheiden, welcher von zwei (oder mehreren) gegebenen Brüchen größer sei. Z. B. bringt man die Brüche $\frac{5}{8}$ und $\frac{2}{3}$ auf gleiche Benennung, so wird $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$, und $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$; es ist aber $\frac{15}{24} < \frac{16}{24}$; daher $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$.

§. 99.

Aufg. Einen gegebenen Bruch auf die einfachste (irreducible) Form zu bringen.

Aufl. u. Bew. Man suche (nach §. 85. oder §. 86.) das größte gemeinschaftliche Maß für den Zähler und Nenner, und dividire beide durch dasselbe, so ist das Verlangte geschehen (§. 95. und §. 85. Zus. 2.). So erhält man z. B.

1) $\frac{865}{4498} = \frac{865 : 173}{4498 : 173} = \frac{5}{26}$; ebenso

2) $\frac{21a^3 - 14a^2b}{12ab - 8b^2} = \frac{7a^2(3a - 2b)}{4b(3a - 2b)} = \frac{7a^2}{4b}$.

§. 100.

Aufg. Gemeine Brüche zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. u. Bew. Man bringe die gegebenen Brüche, wenn sie nicht schon gleichnamig sind, auf gleiche Benennung, und schreibe dann der Summe oder Differenz der Zähler den Generalnenner als Nenner unter. Denn es ist

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} \pm \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n} \text{ (§. 49. Zus. 2.). Z. B.}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{4}{9} - \frac{7}{8} = \frac{60+32-63}{72} = \frac{29}{72}. -$$

$$\frac{2a+b}{a-b} - \frac{a+b}{a} - \frac{b}{a-b} = \frac{a(2a+b)-(a+b)(a-b)-ab}{a(a-b)}$$

$$= \frac{2a^2+ab-a^2+b^2-ab}{a(a-b)} = \frac{a^2+b^2}{a^2-ab}.$$

Zus. Sind unter den gegebenen Summanden auch ganze oder gemischte Zahlen, so kann man entweder die ganzen Zahlen und die Brüche einzeln behandeln, oder die gemischten Zahlen einrichten und die ganzen Zahlen in uneigentliche Brüche (von der Benennung des Hauptnenners) verwandeln, und wie oben verfahren. Das Letztere ist oft, besonders bei der Subtraktion, vortheilhafter. Z. B.

$$7\frac{1}{4} - 5\frac{1}{8} = 7 - 5 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 2 + \frac{2-1}{8} = 2\frac{1}{8}, \text{ oder}$$

$$= \frac{29}{4} - \frac{41}{8} = \frac{58-41}{8} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}.$$

§. 101.

Lehrs. Ein Bruch und eine (ganze) Zahl werden mit einander multiplizirt, wenn man entweder den Zähler des Bruches mit der Zahl multiplizirt, oder (wenn es angeht) den Nenner durch sie dividirt.

Thes. $\frac{a}{b} \times m = \frac{am}{b} = \frac{a}{b:m}$.

Bew. Siehe §. 50. Zus. 1. und §. 53. Zus. 2.

Zus. 1. Ist eine gemischte Zahl mit einer ganzen zu multipliziren, so kann man entweder die gemischte Zahl zuerst ein=

richten und nach dem Lehrsatze verfahren, oder nach §. 35, indem man die gemischte Zahl als Binom behandelt. Z. B.

$$\left(a \pm \frac{b}{n}\right) . m = \frac{an \pm b}{n} . m = \frac{(an \pm b) m}{n}, \text{ oder}$$

$$\left(a \pm \frac{b}{n}\right) . m = am \pm \frac{bm}{n} .$$

Zus. 2. Multiplizirt man einen Bruch mit seinem Nenner, so erhält man den Zähler als Produkt (§. 48. Zus. 1.).

§. 102.

Lehrs. Brüche werden miteinander multiplizirt, wenn man das Produkt der Zähler durch das der Nenner theilt (also Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizirt).

Thes. $\frac{a}{b} . \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$.

Bew. Siehe §. 54.

Kommen in den Zählern und Nennern dieselben Faktoren vor, so kann man diese von der Multiplikation ausschließen; überhaupt ist es vortheilhaft, die Zähler und Nenner der gegebenen Brüche noch vor der Multiplikation gegenseitig abzukürzen. Z. B.

1) $\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{dn}$.

2) $\frac{8}{25} \times \frac{15}{16} \times \frac{12}{9} = \frac{8}{16} \times \frac{15}{25} \times \frac{12}{9} = \frac{1}{2} . \frac{3}{5} . \frac{4}{3} = \frac{1}{5} . \frac{3}{3} . \frac{4}{2} = \frac{2}{5}$.

3) $\frac{3a^2}{2b^2} \times \frac{4b^3}{m^2-n^2} \times \frac{5(m-n)}{6ab} = \frac{3.4.5a^2b^3(m-n)}{2.6ab^3(m^2-n^2)} = \frac{5a}{m+n}$.

Zus. 1. Wird was immer für eine Zahl durch einen echten Bruch multiplizirt, so ist das Produkt stets kleiner, als der Multiplikand. Denn ist $\frac{a}{b} < 1$, so ist auch $\frac{am}{b} < m$ (§. 40.).

Zus. 2. Sind zwei Brüche einander gleich, so sind es auch ihre reciproken Werthe; denn ist $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, so ist auch

$$\frac{m}{n} . \frac{bn}{am} = \frac{a}{b} . \frac{bn}{am} \text{ (§. 39.)}, \text{ d. i. } \frac{b}{a} = \frac{n}{m}.$$

§. 103.

Aufg. Gemischte Zahlen oder Polynomien von Brüchen mit einander zu multipliziren.

Aufl. u. Bew. I. Man richte die gemischten Zahlen ein und verfahre nach §. 102. oder behandle sie (nach §. 42.) als Binomien. Z. B.

$$\left(a+\frac{b}{m}\right)\left(a-\frac{c}{n}\right)=\frac{am+b}{m}\cdot\frac{an-c}{n}=\frac{(am+b)(an-c)}{mn}, \text{ oder}$$

$$=a^2+\frac{ab}{m}-\frac{ac}{n}-\frac{bc}{mn}.$$

II. Bei Polynomien von Brüchen kann man gleichfalls entweder die zusammengehörigen auf gleiche Benennung bringen, und wie Nr. I. verfahren, oder die Regeln des §. 42. befolgen. Das letztere Verfahren ist gewöhnlicher. Z. B.

$$\left(\frac{3a^2}{2}-\frac{5ab}{4}+\frac{3b^2}{5}\right)\left(\frac{4a}{3}+\frac{5b}{2}\right) \text{ gibt}$$

$$2a^3-\frac{5a^2b}{3}+\frac{4ab^2}{5}$$

$$+\frac{15a^2b}{4}-\frac{25ab^2}{8}+\frac{3b^3}{2}$$

$$=2a^3+\frac{25a^2b}{12}-\frac{93ab^2}{40}+\frac{3b^3}{2}.$$

§. 104.

Lehrs. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man entweder I. den Nenner mit ihr multiplizirt, oder II. den Zähler (wenn es angeht) durch sie dividirt.

Thes. $\frac{a}{b}:n=\frac{a}{bn}=\frac{a:n}{b}$.

Bew. Siehe §. 52. Zus. 1. und §. 51.

So ist z. B.

$$\frac{24a^2b}{13c}:6ab=\frac{24a^2b}{78abc}=\frac{4a}{13c}, \text{ oder}$$

$$=\frac{24a^2b:6ab}{13c}=\frac{4a}{13c}.$$

Zus. Ist der Dividend eine gemischte Zahl, so kann man sie entweder einrichten und nach dem Lehrsatze, oder nach §. 49. verfahren, dann §. 100. und hierauf §. 99. anwenden. Z. B.

$$7\frac{4}{5} : 13 = \frac{39}{5} : 13 = \frac{39 : 13}{5} = \frac{3}{5}, \text{ oder}$$

$$= \frac{7}{13} + \frac{4}{65} = \frac{35+4}{65} = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}.$$

§. 105.

Lehrs. Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch einen Bruch dividirt, wenn man den Dividend mit dem reciproken Werthe des Divisorbruches multiplizirt.

Thes. I. $a : \frac{m}{n} = \frac{an}{m}$; II. $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bm}$.

Bew. Siehe §. 53. und §. 55. I.

Zus. 1. Die Division der Brüche wird also durch das Umstürzen des Divisors in eine Multiplikation verwandelt, und es gelten somit die für letztere aufgestellten Gesetze. Z. B.

$$\frac{4a}{3b} : \frac{2c}{6b^2-3b} = \frac{4a}{3b} \cdot \frac{6b^2-3b}{2c} = \frac{4a \cdot 3b(2b-1)}{3b \cdot 2c} = \frac{2a}{c}(2b-1).$$

$$\left(a \pm \frac{b}{c}\right) : \left(d \pm \frac{m}{n}\right) = \frac{ac \pm b}{c} : \frac{dn \pm m}{n} = \frac{(ac \pm b)n}{(dn \pm m)c}.$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{bd} : \frac{ad-bc}{bd} = \frac{ad+bc}{ad-bc}.$$

Bei der Division zusammengesetzter Ausdrücke, deren Glieder Brüche enthalten, verfährt man gewöhnlich nach §. 65. Z. B.

$$\left(\frac{8a^6}{b^3c^3} - \frac{6a^4}{c^2d^2} + \frac{3a^2b^3}{2cd^4} - \frac{b^6}{8d^6}\right) : \left(\frac{4a^4}{b^2c^2} - \frac{2a^2b}{cd^2} + \frac{b^4}{4d^4}\right) = \frac{2a^2}{bc} - \frac{b^2}{2d^2}$$

$$\underline{-\frac{8a^6}{b^3c^3} \mp \frac{4a^4}{c^2d^2} \pm \frac{a^2b^3}{2cd^4}}$$

$$\text{〃} \quad -\frac{2a^4}{c^2d^2} + \frac{a^2b^3}{cd^4} - \frac{b^6}{8d^6}$$

$$\underline{\mp \frac{2a^4}{c^2d^2} \pm \frac{a^2b^3}{cd^4} \mp \frac{b^6}{8d^6}}$$

$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}$$

Zus. 2. Brüche werden durch einander getheilt, wenn man (wo es möglich ist) Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt, und den Quotus der erstern zum Zähler, den der letztern zum Nenner macht. (§. 55. II.)

$$\text{Z. B. } \frac{72a^4b^5}{35c^2d} : \frac{9a^2b^4}{7cd} = \frac{72a^4b^5 : 9a^2b^4}{35c^2d : 7cd} = \frac{8a^2b}{5c}.$$

Zus. 3. Brüche werden auch durch einander getheilt, wenn man sie auf gleiche Benennung bringt, und bloß die Zähler der gleichnamigen Brüche dividirt. Denn es ist

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} : \frac{bm}{bn} = \frac{an}{bn} \cdot \frac{bn}{bm} = \frac{an}{bm}.$$

$$\text{Z. B. } \frac{8}{5} : \frac{7}{6} = \frac{48}{30} : \frac{35}{30} = \frac{48}{35}.$$

Zus. 4. Man kann jeden Faktor aus dem Zähler eines Bruches in den Nenner, und von diesem in den Zähler setzen, wenn man das Zeichen seines Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt. Denn (nach §. 62. Zus. 3.) ist

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^m} \cdot b^n = \frac{b^n}{a^m}.$$

Zus. 5. Jede Zahl gibt durch einen echten Bruch dividirt einen Quotus, der größer ist als der Dividend. Denn ist $\frac{a}{b} < 1$, so folgt $m : \frac{a}{b} > m$ (§. 61.).

§. 106.

Aufg. Einen Bruchesbruch in einen einfachen Bruch zu verwandeln.

Aufl. u. Bew. Man verwandle den gegebenen Bruch in eine Division zweier Brüche dadurch, daß man den Hauptzähler zum Dividend, den Hauptnenner zum Divisor macht, und verfahre nach §. 104. oder §. 105. Z. B.

$$1)\ \frac{1\frac{13}{35}}{1\frac{5}{7}} = 1\frac{13}{35} : 1\frac{5}{7} = \frac{48}{35} : \frac{12}{7} = \frac{48 : 12}{35 : 7} = \frac{4}{5}.$$

$$2)\ \frac{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}{\frac{a - b}{c + b}} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} : \frac{a - b}{c + b} = \frac{a + b}{c - b}.$$

$$3)\ \frac{a + \frac{b}{c}}{d - \frac{m}{n}} = \frac{ac + b}{c} : \frac{dn - m}{n} = \frac{(ac + b)n}{(dn - m)c}.$$

II. Kap. Von den Dezimalbrüchen.

§. 107.

Erkl. 1. Ein Dezimalbruch (zehntheiliger Bruch) ist ein solcher, dessen Nenner eine Potenz von 10, oder 1 mit angehängten Nullen ist.

2. Die allgemeine Form eines Dezimalbruches, wenn a und n was immer für ganze Zahlen sind, ist

$$\frac{a}{10^n} = a \,.\, 10^{-n} \text{ (§. 105. Zus. 4.).}$$

3. Die Dezimalbrüche unterscheiden sich von den gemeinen Brüchen dadurch, daß man im Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern durch einen oben stehenden Punkt, welcher Dezimalzeichen genannt wird, absondert, als der Exponent des Nenners anzeigt (oder der Nenner Nullen enthält), den letztern aber ganz wegläßt.

4. Die durch das Dezimalzeichen rechts abgesonderten Ziffern werden Dezimalziffern oder Dezimalen, auch Bruchstellen, die vor dem Dezimalzeichen stehenden Ganze genannt.

Hat der Zähler eines Dezimalbruches nicht so viele Ziffern, als vermöge des Nenners abzusondern sind, so werden die fehlenden durch Nullen ergänzt, und überdieß dem Dezimalzeichen 0 als Ganze vorangeschrieben. Demnach ist z. B.

$$\frac{24}{100} = \frac{24}{10^2} = 0{\cdot}24;\ \frac{8}{1000} = \frac{8}{10^3} = 0{\cdot}008;\ \frac{3578}{100} = 35{\cdot}78.$$

5. Jede Dezimale ist von der sovielten Ordnung, als die wievielte Stelle sie rechts vom Dezimalzeichen einnimmt. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt der Index (Zeiger) der Dezimale.

6. Ein Dezimalbruch kann auf dreifache Art ausgesprochen werden: a) man liest ihn wie einen gemeinen Bruch, d. h. spricht alle Dezimalziffern zusammen als eine Zahl aus mit ihrem Gesammtnenner; b) man spricht jede Dezimale einzeln mit ihrem Nenner aus; c) man setzt nach Aussprache der ganzen Stellen das Wort „Ganze" bei, und nennt dann die einzelnen Dezimalen der Ordnung nach, 0 nicht ausgenommen. — Diese Art ist die bequemste und gewöhnlichste.

§. 108.

Lehrs. Jede Dezimale ($\alpha \beta \gamma \delta$) eines Dezimalbruches ($D = 0 \cdot \alpha\beta\gamma\delta \ldots$) ist durch die sovielte Potenz von 10 zu dividiren, als der Index der Stelle Einheiten hat.

Thes. $D = 0 \cdot \alpha\beta\gamma\delta \ldots = \frac{\alpha}{10^1} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \frac{\delta}{10^4} + \ldots$

Bew. Nach dem bisher Gesagten ist

$D = 0 \cdot \alpha\beta\gamma\delta \ldots = \frac{\alpha\beta\gamma\delta \ldots}{10000 \ldots}$, oder wenn bloß 4 Dezimalen beibehalten und der Lokalwerth der Ziffern α, β, γ, δ berücksichtigt wird,

$$D = \frac{1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta}{10000}$$

$$= \frac{1000\alpha}{10000} + \frac{100\beta}{10000} + \frac{10\gamma}{10000} + \frac{\delta}{10000}; \text{ also}$$

$$D = \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100} + \frac{\gamma}{1000} + \frac{\delta}{10000} = \frac{\alpha}{10^1} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \frac{\delta}{10^4}.$$

Zus. 1. Der Werth eines Dezimalbruches bleibt beständig, wenn man ihm rechts beliebig viele Nullen anhängt. Denn es ist $\frac{a}{10^n} = \frac{a \cdot 10^m}{10^n \cdot 10^m} = \frac{a \cdot 10^m}{10^{m+n}}$. Z. B. $0 \cdot 25 = 0 \cdot 250$; $4 \cdot 8 = 4 \cdot 80$. Hiedurch lassen sich also Dezimalbrüche sehr leicht gleichnamig machen.

Zus. 2. Hat (umgekehrt) ein gegebener oder durch irgend eine Operation erhaltener Dezimalbruch am Ende Nullen, so kann man diese weglassen.

§. 109.

Erkl. Man nennt einen Dezimalbruch

1) *rein*, wenn er keine Ganzen, *unrein*, wenn er Ganze bei sich hat;

2) *endlich* oder *unendlich*, je nachdem die Anzahl seiner Dezimalen begrenzt oder unbegrenzt ist, was im letztern Falle durch einige Punkte nach den Dezimalen angedeutet wird, z. B. 1·4142136 . . .

Einen unendlichen Dezimalbruch nennt man ferner

a) *periodisch*, wenn eine gewisse Anzahl von Dezimalen (die *Periode* des Bruches genannt) stets in derselben Ordnung wiederkehrt. Er heißt

α) *vollständig* oder *wiederholend*, wenn die Periode sogleich beginnt, z. B. 0·666...; 0·272727...; 0·081081081...

β) *unvollständig* oder *intermittirend*, wenn der Periode noch andere Ziffern vorangehen, z. B. 0·42333...; 0·43979797...

b) *irrational*, wenn er keine Periode hat.

Anm. Man bezeichnet periodische Dezimalbrüche auch dadurch, daß man die Periode nur einmal schreibt, und über die erste und letzte Ziffer derselben einen Punkt setzt. So ist z. B. $0{\cdot}33\ldots = 0{\cdot}\dot{3}$; $7{\cdot}45666\ldots = 7{\cdot}45\dot{6}$; $2{\cdot}532532\ldots = 2{\cdot}\dot{5}3\dot{2}$; $0{\cdot}862727\ldots = 0{\cdot}86\dot{2}\dot{7}$; $0{\cdot}032123123\ldots = 0{\cdot}032\dot{1}2\dot{3}$.

§. 110.

Aufg. Einen gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln, d. h. einen Dezimalbruch aufzufinden, der dem gegebenen gemeinen Bruche gleich ist.

Aufl. Man dividire den Zähler des gegebenen Bruches, so lange es angeht, durch den Nenner, setze, wenn alle Ziffern des Zählers in Rechnung gekommen sind, im Quotus das Dezimalzeichen, und fahre, indem man dem jedesmaligen Reste eine Nulle anhängt, im Dividiren beliebig weit fort.

Bew. Es ist $\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, 10^n}{b \,.\, 10^n} = \frac{a \,.\, 10^n : b}{10^n}$ (§. 56. u. §. 52.).

Man muß also dem Zähler n Nullen anhängen und vom Quotus ebenso viele (d. i. n) Dezimalstellen abschneiden. Dieses geschieht aber, da n willkührlich ist, wenn man successive die Nullen erst dann anhängt, wenn sie einmal nöthig sind. Z. B.

1) $\frac{4327}{128} = 4327 : 128 = 33\cdot8046875$; ebenso

$$\begin{array}{l} 487 \\ 1030 \\ 600 \\ 880 \\ 1120 \\ 960 \\ 640 \\ \text{〃} \end{array}$$

2) $\frac{13}{25} = 13 : 25 = 0\cdot52.$

$$\begin{array}{l} 130 \\ 50 \\ \text{〃} \end{array}$$

Zus. 1. Hat der Nenner eines Bruches rechts angehängte Nullen, so kann man entweder a) diese bei der Division unberücksichtigt lassen, und dann im Quotus das Dezimalzeichen noch um so viele Stellen gegen die Linke vorrücken, als die Anzahl der Nullen des Nenners beträgt; oder b) im Zähler zuerst soviele Dezimalen abschneiden, als die Anzahl der Nullen ist; denn es ist $\frac{a}{b\,.\,10^n} = \frac{a : b}{10^n} = \frac{a : 10^n}{b}$ (§. 52.).

Z. B. $\frac{1424}{800} = \frac{1424 : 8}{100} = \frac{178}{100} = 1\cdot78$, oder

$$= \frac{1424 : 100}{8} = \frac{14\cdot24}{8} = 1\cdot78.$$

Zus. 2. Soll bei einem irreduciblen Bruche die Division aufgehen, so muß 10^n durch b theilbar sein, was nur der Fall ist, wenn b keinen andern einfachen Faktor als 2 und 5 enthält; ist also 10^n durch b nicht theilbar, so kann der Werth des Bruches nie vollkommen genau durch einen Dezimalbruch ausgedrückt werden, oder man erhält keinen endlichen Dezimalbruch.

§. 111.

Lehrs. Jeder gemeine Bruch, der nach §. 110. behandelt, keinen endlichen Dezimalbruch gibt, muß einen periodischen geben.

Bew. Jeder Rest muß kleiner sein, als der Divisor; man kann also nur so viele verschiedene Reste erhalten, als es Zahlen gibt, welche kleiner sind, als der Divisor, muß somit einmal auf einen Rest kommen, der schon früher vorhanden war, und dann wiederholen sich im Quotus dieselben Ziffern. Z. B.

1) $\frac{47}{12} = 47 : 12 = 3{\cdot}9166 \ldots\ldots = 3{\cdot}91\dot{6}$

$$\begin{array}{l} 47 : 12 \\ \underline{} \\ 110 \\ 20 \\ 80 \\ 80 \end{array}$$

2) $\frac{3}{7} = 0{\cdot}42857142 \ldots = 0{\cdot}\dot{4}2857\dot{1}$

Anm. In der Ausübung werden von einem unendlichen Dezimalbruche nur so viele Dezimalen genommen, als die Genauigkeit des Resultates verlangt, die übrigen weggelassen. Hiebei beobachtet man folgende Regel: „Ist die erste der weggelassenen Dezimalen größer als 5, so wird die letzte der beibehaltenen um 1 erhöht, ist sie aber kleiner als 5, so bleibt die letzte der beibehaltenen unverändert; bei 5 selbst ist es gleichgiltig. So würde man z. B., wenn 4 Dezimalen nöthig wären, 3·1416, und bei 2 Stellen 3·14 von dem Bruche 3·14159265 ... nehmen.

§. 112.

Aufg. Einen endlichen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Aufl. u. Bew. Man gebe ihm den gehörigen Nenner, schreibe ihn also als gemeinen Bruch und reduzire diesen durch das größte gemeinschaftliche Maß seines Zählers und Nenners (§. 107. und §. 99.). — Z. B.

$$0{\cdot}375 = \frac{375}{1000} = \frac{375:125}{1000:125} = \frac{3}{8}.$$

§. 113.

Aufg. Einen periodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Aufl. I. Ist der gegebene Bruch ein vollständiger, so nehme man seine Periode, gebe ihr soviele Neuner zum Nenner, als sie Ziffern enthält, und reduzire.

Bew. Es sei p die Periode, n die Anzahl ihrer Ziffern, so ist, wenn man den Werth des zu suchenden Bruches durch x bezeichnet,

$$x = p \,.\, 10^{-n} + p \,.\, 10^{-2n} + p \,.\, 10^{-3n} + \ldots,$$

folglich auch (nach §. 39.):

$x \cdot 10^n = 10^n (p \cdot 10^{-n} + p \cdot 10^{-2n} + p \cdot 10^{-3n} + \ldots)$ oder
$x \cdot 10^n = p + p \cdot 10^{-n} + p \cdot 10^{-2n} + p \cdot 10^{-3n} \ldots$; davon
$x = \quad p \cdot 10^{-n} + p \cdot 10^{-2n} + p \cdot 10^{-3n} \ldots$ subtrahirt,
gibt $x \cdot 10^n - x = p$, oder

$x(10^n - 1) = p$; daher

$$x = \frac{p}{10^n - 1},$$

wenn man beiderseits durch $(10^n - 1)$ dividirt. Es ist aber $(10^n - 1)$ eine Zahl, welche aus lauter Neunern besteht, und zwar aus n, d. i. aus so vielen, als die Periode Stellen hat. Somit ist z. B.

$$1)\quad 0{\cdot}333\ldots = 0{\cdot}\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$2)\quad 2{\cdot}\dot{6}7\dot{5} \quad = 2\frac{675}{999} = 2 + \frac{675:27}{999:27} = 2\frac{25}{37}.$$

II. Ist der gegebene Bruch unvollständig, so nehme man die der Periode vorangehende Zahl nebst der Periode, indem man letztere nur einmal schreibt, subtrahire davon die der Periode vorangehende Zahl, gebe der Differenz einen Nenner, welcher so viele Neuner, als die Periode Stellen und rechts davon so viele Nullen hat, als der Periode Ziffern vorangehen, und reduzire dann, wenn es möglich ist.

Bew. Es sei a die der Periode vorangehende Zahl, ihre Zifferanzahl sei m, die Periode sei p, ihre Zifferanzahl n, so ist der Werth des gemeinen Bruches:

$$x = \frac{a}{10^m} + \frac{1}{10^m}\left(\frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} + \ldots\right),$$

$$= \frac{a}{10^m} + \frac{1}{10^m} \cdot \frac{p}{10^n - 1}, \text{ (Nr. I.)}$$

oder auf gleiche Benennung gebracht,

$$x = \frac{a(10^n - 1) + p}{(10^n - 1)10^m} = \frac{a \cdot 10^n - a + p}{(10^n - 1)10^m}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{(a \cdot 10^n + p) - a}{(10^n - 1)10^m}.$$

Z. B. 1) $0{\cdot}5333\ldots = \dfrac{53 - 5}{9 \cdot 10} = \dfrac{48}{90} = \dfrac{8}{15}.$

$$2)\ 0\cdot708\dot{3} = \frac{7083 - 708}{9\,.\,1000} = \frac{6375}{9000} = \frac{17}{24}\,.$$

$$3)\ 5.70\dot{4}\dot{5} = 5 + \frac{7045 - 70}{9900} = 5\frac{6975}{9900} = 5\frac{31}{44}\,.$$

§. 114.

Aufg. Gegebene Dezimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. u. Bew. Man schreibe dieselben so unter einander, daß die Dezimalzeichen, also auch die gleichnamigen Dezimalen genau unter einander zu stehen kommen, und verrichte die Addition oder Subtraktion wie bei ganzen Zahlen. Im Resultate setze man das Dezimalzeichen an dieselbe Stelle, an der es in den gegebenen Ausdrücken steht. Denn denkt man sich, wenn die Anzahl der Dezimalen in den gegebenen Brüchen ungleich ist, die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzt, so sind die Brüche gleichnamig, und es trifft daher die Regel §. 100. zu. Z. B.

1)	7·30146	2)	25·0218
± {	2·0986		— 16·837645
	0·024893		= 8·184155
	0·8	3)	3·1452
Summe =	10·224953		— 2·9865047
Differenz =	4·377967		= 0·1586953

Zus. 1. Ist ein Dezimalbruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren, so ziehe man die Ganzen des Dezimalbruches von der um 1 verminderten ganzen Zahl ab, jede Dezimale aber (vom Zeichen angefangen) von 9 mit Ausnahme der letzten, welche von 10 zu subtrahiren ist. Z. B. 18 — 14·45896 = 3·54104.

Zus. 2. Sind unendliche Dezimalbrüche zu addiren oder zu subtrahiren, so sind von allen gleichviele Dezimalen zu nehmen.

§. 115.

Aufg. Gegebene Dezimalbrüche mit einander zu multipliziren.

Aufl. u. Bew. Man multiplizire sie wie ganze Zahlen und schneide vom Produkte so viele Dezimalstellen ab, als die Faktoren zusammen enthalten. Fehlende Dezimalen werden durch Nullen ergänzt. Denn es ist (nach §. 62, Zus. 4.):

$a\,.\,10^{-n} \times b\,.\,10^{-m} = ab\,.\,10^{-n-m} = ab\,.\,10^{-(m+n)}$. Z. B.

1) $4{\cdot}305 \times 2{\cdot}18$;

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}18 \\ \hline 34440 \\ 4305 \\ 8610 \\ \hline 9{\cdot}38490 \end{array}$$

$= 9{\cdot}3849$

2) $0{\cdot}0273 \times 0{\cdot}845$;

$$\begin{array}{r} 0{\cdot}845 \\ \hline 1365 \\ 1092 \\ 2184 \\ \hline 230685 \end{array}$$

also das Produkt $= 0{\cdot}0230685$.

Zus. Ein Dezimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multiplizirt, wenn man das Dezimalzeichen um soviele Stellen von der Linken gegen die Rechte fortrückt, als der Exponent jener Potenz von 10 Einheiten hat. Hat der Dezimalbruch nicht so viele Stellen, so werden die fehlenden durch Nullen ausgefüllt. Denn es ist $a \,.\, 10^{-n} \,.\, 10^{r} = a \,.\, 10^{-n+r} = a \,.\, 10^{-(n-r)}$. Z. B.

$$5{\cdot}347 \,.\, 10^2 = 5 \cdot 347.100 = 534{\cdot}7.$$

$$0{\cdot}0078 \,.\, 10^6 = 7800.$$

§. 116.

Aufg. Das Produkt zweier Dezimalbrüche auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen zu finden.

Aufl. Man verfahre nach folgenden praktischen Regeln:

1) Setze die Einheiten der Ganzen des Multiplikators unter jene Dezimale des Multiplikands, die im Produkte noch vorkommen soll, und reihe daran die übrigen Ziffern des Multiplikators in umgekehrter Ordnung.

2) Dann multiplizire man mit jeder Ziffer des Multiplikators den Multiplikand von der über dem jedesmaligen Multiplikator stehenden Ziffer angefangen, und schreibe die Partialprodukte so unter einander, daß die erste Ziffer eines jeden unter die letzte (rechts stehende) des unmittelbar vorhergehenden zu stehen kommt.

3) Damit jedoch hiebei das Produkt in den letzten Dezimalen nicht zu unrichtig wird, so multiplizirt man mit jeder Ziffer des Multiplikators auch noch die, welche der im Multiplikand unmittelbar darüber stehenden rechts folgt, schreibt jedoch das Produkt nicht an, sondern geht bis zur nächst größern Zahl, die mit 5 schließt, und addirt die Zehner dieser letztern zum wirklich anzusetzenden Produkte. Diese addirten Zehner nennt man die Korrektur.

4) Leere Stellen der so über einander stehenden Faktoren kann man durch Nullen ersetzen. — Die Richtigkeit des Verfahrens folgt daraus, daß jedes Partialprodukt, also auch deren Summe die verlangte Benennung erhält. Z. B.

I. Es soll das Produkt 3·186378 . 15·78654 auf 4 Dezimalen bestimmt werden. Die Rechnung stellt sich also:

3·186378		15·78654
4568751	oder:	8736813
318638		473596
159319		15787
22304		12629
2549		947
191		47
16		11
1		1
50·3018		50·3018 .

II. Man soll das Produkt 225·357 . 8·90426 auf 5 Dezimalen bilden.

225·35700	oder:	8·9042600
624098		753522
180285600		178085200
20282130		17808520
90143		4452130
4507		267128
1352		44521
2006·63732		6233
		2006·63732

III. Es sei noch das Produkt 18·7358249 . 0·000875 mit 6 Dezimalen anzugeben.

18·7358249	oder	0·0008750
578....		...53781
14988		8750
1311		7000
94		613
0·016393		26
		4
		0·016393

§. 117.

Aufg. Gegebene Dezimalbrüche zu dividiren.

Aufl. u. Bew. Man stelle im Dividend und Divisor gleichviele Dezimalstellen her, und theile sie dann mit Weglassung des Dezimalzeichens wie ganze Zahlen, oder, wenn die Division nicht aufgeht, fahre man wie bei Verwandlung eines gemeinen in einen Dezimalbruch weiter. Denn es ist (nach §. 105, Zus. 3.)

$$\frac{a}{10^n} : \frac{b}{10^n} = \frac{a : b}{10^n : 10^n} = \frac{a}{b}.$$ Z. B. man findet

1) 0·00725 : 2·5 = 725 : 250000 = 0·0029.
2) 48·576 : 0·0024 = 485760 : 24 = 20240.
3) 45·385 : 8·49353 = 4538500 : 849353 = 5·343479 ....
4) 428·173 : 0·59 = 428173 : 590 = 725·71694 ....

Zus. 1. Ein Dezimalbruch wird durch eine Potenz von 10 getheilt, wenn man das Dezimalzeichen um so viele Stellen gegen die Linke vorrückt, als der Exponent jener Potenz Einheiten enthält. Die fehlenden Stellen sind mit Nullen zu besetzen. Denn es ist $\frac{a}{10^n} : 10^m = \frac{a}{10^n . 10^m} = \frac{a}{10^{m+n}} = a . 10^{-(m+n)}$. Z. B.

$$158·24 : 10^2 = 1·5824;\ 3·75 : 10^4 = 0·000375.$$

Zus. 2. Ein Dezimalbruch wird auch durch einen andern dividirt, wenn man im Dividend das Dezimalzeichen um so viele Stellen gegen die Rechte fortrückt, als der Divisor Dezimalen hat, und letztern als ganze Zahl nimmt. Denn

$$\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a}{10^m} . \frac{10^n}{b} = \frac{a . 10^n}{10^m} : b$$ (§. 56, I.) Z. B.

1) 24·1416 : 0·72 = 2414·16 : 72 = 33·53.
2) 4·7385 : 0·00543 = 473850 : 543 = 872·6519 ...

§. 118.

Aufg. Den Quotienten zweier Dezimalbrüche (durch Abkürzung der Operation) bis auf eine gegebene Anzahl von Dezimalen zu finden.

Aufl. Man bestimme 1) wie viele ganze Stellen der Quotient erhalten wird, und schneide dann im Divisor von der Linken gegen die Rechte so viele Ziffern ab, als der zu suchende Quotus

Ganze und Dezimalen (also überhaupt Ziffern) erhalten soll. (Hat der gegebene Divisor nicht hinreichend viele Ziffern, so ersetze man die fehlenden durch rechts angehängte Nullen, oder suche auf dem gewöhnlichen Wege um eine Ziffer mehr, als die Anzahl der Nullen beträgt, die man anhängen sollte.)

2) Mit dem so gebildeten Divisor theile man in den Dividend, multiplizire mit dem Quotus den Divisor, addire aber im Produkte zur letzten Ziffer die Korrektur, nämlich die Zehner aus dem Produkte des Quotus und der ersten weggelassenen Ziffer des Divisors (vgl. §. 116, 3.), und subtrahire.

3) Zum Reste wird keine neue Ziffer aus dem Dividend herabgesetzt, sondern der Divisor rechts um eine Stelle abgekürzt, und dann wieder nach Nr. 2 verfahren, indem man die jedesmal eben weggelassene Ziffer des Divisors zur Korrektur verwendet. Z. B.

I. Man soll den Quotus 815·46732 : 9·5273658 auf 4 Dezimalen angeben.

Da 815 : 9 zwei ganze Stellen gibt, so sind 6 Partialquotienten zu suchen. Es wird demnach

815·46732 : 9·52736|58 = 85·5921
532781
56413
8776
202
12
2

II. Es soll der Quotient 3786·53 : 8652·149 auf 5 Stellen angegeben werden.

Die Ganzen werden hier 0; daher sind nur 5 Ziffern zu suchen.

3786·53 : 8652·1|49 = 0·43764
32567
6611
555
36
2

III. Man suche 8·736549 : 2085·834 auf 7 Stellen.

Da 2085 erst in 8000 enthalten ist, so gehen den bedeutenden

Ziffern des Quotienten 3 Nullen voran, wovon die erste die fehlenden Ganzen anzeigt; also sind wieder 5 Ziffern zu suchen, und es wird

8·736549 : 2085·8|34 = 0·0041886
3932
1846
178
12
″

IV. Man bestimme den Quotienten 0·083456258 : 0·0006432 auf 4 Dezimalen.

Da 0·083456258 : 0·0006432 = 834·56258 : 6·432 (§. 56, I.), ferner 834 : 6 drei ganze Stellen gibt, so sind 7 Ziffern zu suchen. Weil aber der Divisor nur 4 Ziffern hat, so müssen ihm 3 Nullen angehängt, oder 4 Ziffern des Quotus auf dem gewöhnlichen Wege gesucht, und dann erst der Divisor successive abgekürzt werden. Wir wählen den letztern Weg, und erhalten:

834·56258 : 6·432 = 129·7516
19136
62722
48345
3321
105
41
3

III. Kap. Von den Kettenbrüchen.

§. 119.

Erkl. 1. Ein Kettenbruch (auch continuirlicher oder Stufenbruch genannt) ist ein irregulärer Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, welcher jedesmal wieder (mit Ausnahme des letzten) dieselbe Eigenschaft besitzt.

2. Die allgemeine Form eines Kettenbruches ist:

$$\cfrac{m}{a+\cfrac{n}{b+\cfrac{p}{c+\cfrac{q}{d+\cfrac{r}{e+\ldots}}}}}$$

3. Jeder der einfachen Brüche $\left(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}, \frac{p}{c} \ldots\right)$ heißt ein Glied des Kettenbruches oder ein Partialbruch.

4. Der vorzüglichste Gebrauch und Nutzen der Kettenbrüche besteht darin, gemeine Brüche, deren Zähler und Nenner größere und zugleich relative Primzahlen sind, annäherungsweise durch kleinere Zahlen auszudrücken.

§. 120.

Erkl. 1. Ein Kettenbruch wird ein einfacher oder gewöhnlicher genannt, wenn die Zähler aller Glieder 1, die Nenner aber ganze, positive Zahlen sind. Die allgemeine Form solcher Kettenbrüche (von denen hier ausschließlich gehandelt wird) ist daher

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}}}$$

2. Hinsichtlich der Anzahl seiner Glieder heißt ein Kettenbruch endlich, wenn dieselbe begrenzt ist, außerdem unendlich. Kehrt bei unendlichen Kettenbrüchen immer eine bestimmte Anzahl von Gliedern in derselben Ordnung (was gewöhnlich der Fall ist) wieder, so nennt man sie periodische.

§. 121.

Aufg. Einen gemeinen Bruch in einen gewöhnlichen Kettenbruch zu verwandeln.

Aufl. u. Bew. Man ziehe, wenn der gegebene Bruch unecht ist, zuerst die Ganzen heraus, dividire dann Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler, mit dem im Nenner erhaltenen Reste verfahre man ebenso, und so fort bis die Division aufgeht. Der Grund für die Richtigkeit des Verfahrens beruht auf §. 95. Z. B.

$$\frac{253}{94} = 2 + \frac{65}{94} = 2 + \frac{1}{94 : 65} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{29}{65}},$$ ferner

$$\frac{29}{65} = \frac{1}{65:29} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{7}{29}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{29:7}},$$

$$= \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}; \text{ daher}$$

$$\frac{253}{94} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}.$$

Am einfachsten wird ein Bruch in einen Kettenbruch verwandelt, wenn man seinen Zähler durch den Nenner dividirt, mit dem letztern und dem Reste ebenso, u. s. f. nach §. 85. verfährt, bis die Division aufgeht. Der erste erhaltene Quotient gibt die Ganzen des Kettenbruches, die übrigen aber der Ordnung nach die Nenner der Partialbrüche des gesuchten Kettenbruches. Soll z. B. $\frac{253}{94}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so hat man

$$253 \overset{2}{\frown} : 94 \overset{1}{\frown} : 65 \overset{2}{\frown} : 29 \overset{4}{\frown} : 7 \overset{7}{\frown} : 1; \text{ daher}$$

$$\frac{253}{94} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}}}}, \text{ wie oben.}$$

Für den Bruch $\frac{251}{570}$ erhalten wir:

$$251 \overset{0}{\frown} : 570 \overset{2}{\frown} : 251 \overset{3}{\frown} : 68 \overset{1}{\frown} : 47 \overset{2}{\frown} : 21 \overset{4}{\frown} : 5 \overset{5}{\frown} : 1; \text{ mithin}$$

$$\frac{251}{570} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}}}}.$$

Ist der zu verwandelnde Bruch ein Dezimalbruch, so gebe man ihm seinen Nenner, und verfahre wie oben.

§. 122.

Aufg. Einen gegebenen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Aufl. Man schreibe die Nenner aller Glieder in umgekehrter Ordnung (d. i. vom letzten angefangen) neben einander, setze unter den ersten 1, unter den zweiten den vorhergehenden Nenner selbst, multiplizire mit dem zweiten Nenner die darunter gesetzte Zahl, addire zum Produkte die ihr unmittelbar vorhergehende links stehende Zahl der zweiten Reihe, und schreibe die Summe unter den dritten Nenner u. s. f. Die so gefundene letzte Zahl ist der Nenner, die vorletzte der Zähler des gesuchten Bruches.

Bew. Man habe z. B. einen Kettenbruch mit drei Gliedern, so ist offenbar

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{\cfrac{bc+1}{c}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c}{bc+1}}$$

$$= \frac{1}{\cfrac{a(bc+1)+c}{bc+1}} = \frac{bc+1}{a(bc+1)+c}.$$

Verfahren wir nach der in der Auflösung angegebenen Regel, so erhalten wir

$$\begin{array}{cccc} c, & b, & a, & \\ \hline 1, & c, & bc+1, & a(bc+1)+c; \end{array}$$

also der Werth des gegebenen Kettenbruches $= \frac{bc+1}{a(bc+1)+c}$, der mit dem obigen übereinstimmt.

Um z. B. $\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}$

in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, haben wir demnach

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 2, & 3, & 4, & 4, & \\ \hline 1, & 2, & 5, & 17, & 73, & 309; \end{array}$$

mithin der gegebene Kettenbruch $= \frac{73}{309}$.

§. 123.

Erkl. 1. Den gemeinen Bruch, welchen alle Glieder eines Kettenbruches bei der Verwandlung geben, nennt man den wahren oder Totalwerth des Kettenbruches.

2. Nimmt man von einem Kettenbruche nur eines oder mehrere Glieder vom ersten angefangen, läßt die übrigen Glieder der Kette weg, und verwandelt die genommenen in gemeine Brüche, so heißen diese die reduzirten oder Näherungswerthe des gegebenen Bruches.

3. Die Näherungswerthe werden nach der Anzahl der Glieder benannt, aus denen sie gebildet werden, und heißen demnach gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl der Glieder, die sie enthalten, gerade oder ungerade ist.

4. Der Unterschied zwischen zwei Näherungswerthen wird Differenzbruch, sein Zähler Differenzzähler genannt.

§. 124.

Aufg. Die Näherungswerthe eines gegebenen Kettenbruches zu finden.

Aufl. I. Hat der Bruch Ganze bei sich, so schreibe man diese und die Nenner aller Partialbrüche neben einander, setze unter die Ganzen $\frac{1}{0}$, unter den ersten Nenner aber eben diese Ganzen gebrochen durch 1. Dann multiplizire man mit der über diesem Bruche stehenden Zahl (Nenner des ersten Partialbruches) Zähler und Nenner des Bruches und addire zu den Produkten beziehungsweise Zähler und Nenner des unmittelbar vorangehenden Bruches, und setze das Resultat unter den nächsten Nenner, mit dem man dann auf dieselbe Art verfährt. Z. B. Soll

$$2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

annäherungsweise in kleinern Zahlen ausgedrückt werden, so erhalten wir

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 4, & 3, & 2, & 2, & \\ \hline \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{9}{4}, & \frac{29}{13}, & \frac{67}{30}, & \frac{163}{73}. \end{array}$$

Der letzte Bruch ist der Totalwerth.

II. Enthält der gegebene Bruch keine Ganzen, so schreibe man gleichfalls alle Nenner neben einander, unter den ersten aber $\frac{0}{1}$, unter den zweiten 1 gebrochen durch den ersten Nenner, und verfahre wie oben. Z. B. als Näherungswerthe des Bruches

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}}}}$$ ergeben sich

$$\begin{array}{ccccccc} & 1\,, & 2\,, & 2\,, & 3\,, & 3\,, & 4 \\ \hline \frac{0}{1}\,, & \frac{1}{1}\,, & \frac{2}{3}\,, & \frac{5}{7}\,, & \frac{17}{24}\,, & \frac{56}{79}\,, & \frac{241}{340}\,. \end{array}$$

Der letzte Bruch ist wieder der Totalwerth des gegebenen Bruches, und es wird also auch durch dieses Verfahren ein Kettenbruch in einen gemeinen zugleich mit Angabe der Näherungswerthe verwandelt.

Der Bew. für die Richtigkeit des Verfahrens selbst läßt sich auf folgende Art führen. Man habe den Kettenbruch

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$$; so ergibt sich auf die oben angegebene Art

$$\begin{array}{cccc} a\,, & b\,, & c\,, & d \\ \hline \frac{1}{0}\,, & \frac{a}{1}\,, & \frac{ab+1}{b+0}\,, & \frac{c(ab+1)+a}{bc+1}\,, \end{array}$$ u. s. w.

Ebenso ist, wenn man nur einen Partialbruch nimmt,

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}=\frac{ab+1}{b+0}.$$

Nimmt man noch den zweiten dazu, so wird

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=a+\frac{c}{bc+1}=\frac{abc+a+c}{bc+1},$$ oder

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1},$$ u. s. f. wie oben.

Führt ein Kettenbruch keine Ganzen bei sich, z. B.

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\dots\dots}}};$$

so hat man $\dfrac{a\,,\quad b\,,\quad c}{\dfrac{0}{1},\ \dfrac{1}{a},\ \dfrac{b+0}{ab+1},\ \dfrac{bc+1}{c(ab+1)+a}}$, u. s. w.

Ebenso ist der erste Partialbruch $\frac{1}{a}$. Nimmt man zwei, so erhält man

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}} = \frac{b}{ab+1} = \frac{b+0}{ab+1}\text{, u. s. f.}$$

Zus. Jeder Näherungswerth wird also aus den bereits vorhandenen erhalten, wenn man den Zähler und Nenner des letzten derselben mit dem Nenner des darauf folgenden Partialbruches multiplizirt, und zu den Produkten beziehungsweise Zähler und Nenner des nächst vorhergehenden Näherungswerthes addirt.

§. 125.

Lehrs. Alle ungeraden Näherungswerthe sind größer, alle geraden aber kleiner, als der Totalwerth eines Kettenbruches.

Bew. In dem Kettenbruche

$\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\dfrac{1}{d}\ldots}}}$ ist der erste Näherungswerth $\frac{1}{a}$. Nun ist aber offenbar $a < a + \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\ldots}}$; daher (nach §. 61.)

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\ldots}}}$$

Der zweite Näherungswerth ist $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}$; es ist aber

$a + \dfrac{1}{b} > a + \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\ldots}}$ (§. 89, Zus. 4.); folglich

$$\frac{1}{a+\dfrac{1}{b}} < \frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c+\ldots}}};$$

Fährt man auf diese Art fort, so ergibt sich, daß die Näherungswerthe abwechselnd größer und kleiner werden, als der gegebene Kettenbruch, je nachdem sie ungerade oder gerade sind.

Von der Richtigkeit kann man sich überdieß an den Beispielen des §. 124. überzeugen, wo im erstern $\frac{9}{4}$, im letztern $\frac{1}{1}$ der erste Näherungswerth ist.

Zus. Der Totalwerth eines Kettenbruches liegt also immer zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen.

§. 126.

Lehrs. Die Differenz der Werthe zweier auf einander folgender Näherungswerthe ist immer gleich ± 1, getheilt durch das Produkt ihrer Nenner.

Bew. Es seien $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so wird, wenn noch ein Partialbruch $\frac{1}{r}$ hinzukommt, der nächste Näherungswerth $\frac{pr+m}{qr+n}$ sein (§. 124, Zus.). Ferner ist

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq} = \frac{+(mq-np)}{nq}; \text{ dann}$$

$$\frac{p}{q} - \frac{pr+m}{qr+n} = \frac{np-mq}{q(qr+n)} = \frac{-(mq-np)}{q(qr+n)}.$$

Subtrahirt man also zwei auf einander folgende Näherungswerthe, so geben ihre Zähler immer die nämliche Differenz, aber abwechselnd $\pm$. Bei den ersten zwei Näherungsbrüchen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$ $= \frac{b}{ab+1}$ ist aber $\frac{1}{a} - \frac{b}{ab+1} = \frac{ab+1-ab}{a(ab+1)} = \frac{+1}{a(ab+1)}$; daher wird die Differenz der Zähler abwechselnd ± 1 sein, je nachdem der Minuend ein ungerader oder gerader Näherungswerth ist, und somit ist allgemein $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{nq}$.

Zus. Die Unterschiede zwischen zwei auf einander folgenden Näherungswerthen werden also immer kleiner, da nq immer größer wird, je mehr Partialbrüche sie enthalten. Da nun der Total-

werth zwischen zwei auf einander folgenden Näherungsbrüchen liegt (§. 125, Zus.), so kommen diese dem Totalwerthe desto näher, aus je mehr Gliedern der Kette sie entstehen.

§. 127.

Lehrs. Der Zähler und Nenner eines jeden Näherungswerthes sind relative Primzahlen.

Bew. Gesetzt es wäre der Näherungswerth $\frac{p}{q}$ durch irgend eine Zahl (δ) vereinfachbar, so müßte auch, wenn man ihn von dem vorhergehenden, $\frac{m}{n}$, abzieht, $\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$ durch δ reduzirbar sein; dieses ist aber unmöglich, da

$$\frac{mq - np}{nq} = \frac{\pm 1}{nq} \text{ ist (§. 126.).}$$

§. 128.

Erkl. 1. Jene Näherungsbrüche, welche entweder größer oder kleiner sind, als der wahre Werth eines gegebenen Kettenbruches, also alle ungeraden, sowie auch alle geraden, nennt man Näherungswerthe derselben Art.

2. Die möglichen Brüche zwischen zwei Näherungswerthen derselben Art, welche zugleich Näherungswerthe des gegebenen Kettenbruches sind, heißen eingeschaltete oder intermediäre Näherungswerthe.

§. 129.

Lehrs. Zwischen zwei Näherungswerthen derselben Art lassen sich immer soviele andere Näherungswerthe einschalten, als der Zähler des Differenzbruches Einheiten enthält, weniger einer.

Bew. Es seien $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ zwei beliebige auf einander folgende Näherungswerthe, so ist, wenn noch der Partialbruch $\frac{1}{r}$ hinzukommt, der nächste Näherungswerth $\frac{pr + m}{qr + n}$, welcher mit $\frac{m}{n}$ von derselben Art ist. Nun ist aber

$$\frac{pr + m}{qr + n} - \frac{m}{n} = \frac{npr - mqr}{n(qr + n)} = \frac{r(np - mq)}{n(qr + n)}$$

$$= \frac{-r(mq - np)}{n(qr + n)} = \frac{-r \cdot \pm 1}{n(qr + n)}$$

$$= \frac{\mp r}{n(qr + n)},$$

da $mq - np = \pm 1$, (§. 126.); d. h. der Zähler des Differenzbruches gleicht dem Nenner jenes Partialbruches, durch welchen der letztere Bruch, nämlich $\frac{pr + m}{qr + n}$, entstanden ist. Zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{pr + m}{qr + n}$ sind also r Näherungsbrüche möglich, von denen einer vorhanden ist, also die übrigen $(r - 1)$ sich bilden lassen, wenn man nach und nach $r = 1, 2, 3 \ldots (r - 1)$ setzt, woraus dann die intermediären Brüche $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1.p + m}{1.q + n}$; $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{2p + m}{2q + n}$; $\frac{\mu}{\nu} = \frac{3p + m}{3q + n}, \ldots \frac{\psi}{\omega} = \frac{(r - 1)p + m}{(r - 1)q + n}$ entstehen.

Die eingeschalteten Brüche sind mit denen, zwischen welchen sie eingeschaltet werden, von derselben Art.

Zus. Um also alle möglichen Näherungswerthe eines Kettenbruches zu finden, bestimme man zuerst (nach §. 124.) die auf einander folgenden Näherungswerthe, suche dann zwischen je zweien derselben Art ihren Differenzzähler, indem man sie unter die Benennung des Produktes ihrer Nenner bringt, erweitere dann den dazwischen liegenden Bruch successive durch 1, 2, 3, 4 ... (r — 1), und addire zu den Produkten beziehungsweise den Zähler und Nenner des ihm vorangehenden Bruches.

Z. B. Verwandelt man den Bruch 3·14159 in einen Kettenbruch, so wird

$$3{\cdot}14159 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}}}}}.$$

Als zugehörige Näherungswerthe erhält man nach §. 124.:

$$\frac{}{\frac{1}{0}\,,}\quad \begin{array}{ccccccc} 3, & 7, & 15, & 1, & 25, & 1, & 7 \\ \hline \frac{3}{1}; & \frac{22}{7}; & \frac{333}{106}; & \frac{355}{113}; & \frac{9208}{2931}; & \frac{9563}{3044}; & \frac{76149}{24239}. \end{array}$$

Da nun $\frac{1}{0} - \frac{22}{7} = \frac{7-0}{0} = \frac{7}{0}$ ist, so lassen sich nach $\frac{3}{1}$ noch 6 Näherungsbrüche einschalten, die sämmtlich größer als 3·14159 werden, weil $\frac{22}{7}$ ein ungerader Näherungswerth ist. Diese eingeschalteten Näherungswerthe werden der Ordnung nach in gemeinen und Dezimalbrüchen:

$\frac{1.3+1}{1.1+0} = \frac{4}{1} = 4{\cdot}00$	$\frac{4.3+1}{4.1+0} = \frac{13}{4} = 3{\cdot}25$
$\frac{2.3+1}{2.1+0} = \frac{7}{2} = 3{\cdot}50$	$\frac{5.3+1}{5.1+0} = \frac{16}{5} = 3{\cdot}20$
$\frac{3.3+1}{3.1+0} = \frac{10}{3} = 3{\cdot}33\ldots$	$\frac{6.3+1}{6.1+0} = \frac{19}{6} = 3{\cdot}16\ldots$

woraus man zugleich sieht, daß sie sämmtlich $>$ 3·14159 sind, aber diesem Bruche immer näher kommen.

Auf gleiche Weise lassen sich zwischen $\frac{3}{1}$ und $\frac{333}{106}$, oder nach $\frac{22}{7}$ noch 14 Näherungswerthe einschalten; denn es ist $\frac{3}{1} - \frac{333}{106}$ $= \frac{318-333}{106} = \frac{-15}{106}$. Diese werden aber gegen 3·14159 sämmtlich zu klein werden, weil $\frac{333}{106}$ ein gerader Näherungswerth ist.

Zwischen $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ läßt sich kein, zwischen $\frac{333}{106}$ und $\frac{9208}{2931}$ aber lassen sich 24 Näherungswerthe einschalten, ebenso gibt es zwischen $\frac{9208}{2931}$ und $\frac{76149}{24239}$ noch 6, und endlich zwischen $\frac{9563}{3044}$ und dem wahren Werthe noch 3 intermediäre Brüche.

Anm. 1. In der Ausübung ist für die Genauigkeit der Rechnung meist schon der zweite oder der dritte Näherungswerth hinreichend.

Anm. 2. Gibt man von einem Kettenbruche alle Näherungswerthe an, so werden die eingeschalteten gewöhnlich eingeklammert.

So sind z. B. alle Näherungswerthe des Bruches $\frac{52}{231}$ der Ordnung nach

$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{5}\right), \frac{2}{9}, \left(\frac{3}{13}, \frac{5}{22}\right), \frac{7}{31}, \frac{9}{40}, \left(\frac{16}{71}, \frac{25}{111}, \frac{34}{151}, \frac{43}{191}\right).$$

IV. Abschnitt. Von den Potenzen.

§. 130.

Erkl. 1. Unter Potenz (Würde oder Dignität) versteht man überhaupt ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

Jeder der gleichen Faktoren heißt Wurzel, Grundzahl oder Basis, ihre Anzahl aber der Grad der Potenz.

2. Die Erklärung der Potenz enthält drei Zahlenbegriffe — Grundzahl, Grad und Potenz —, von denen sich jeder bestimmen läßt, also unbekannt sein kann, sobald die beiden andern gegeben sind. Die Potenzenlehre zerfällt demnach in drei Theile, und handelt

a) vom Potenziren, wenn die Potenz,

b) vom Radiziren, wenn die Basis, und

c) vom Logarithmiren, wenn der Grad der Potenz die erst zu suchende Größe ist.

I. Kap. Vom Potenziren.

§. 131.

Erkl. 1. Eine Zahl mit einer andern potenziren, oder eine Zahl zu einer verlangten Potenz erheben, heißt die erstere so oft als Faktor setzen, als die letztere Einheiten enthält (vgl. §. 43.).

Die zu potenzirende Zahl (Grundzahl) wird hier Dignand, der Grad aber, zu dem sie erhoben werden soll, der Exponent der Potenz genannt.

2. Die allgemeine Form einer Potenz, wenn a einen beliebigen Dignand, und n einen beliebigen Exponenten bezeichnet, ist a^n (vgl. §. 43.).

Zus. Jede Potenz von 0 ist wieder 0 (§. 38, II.).

§. 132.

Erkl. 1. Hinsichtlich der Dignanden unterscheidet man

a) Potenzen monomischer oder einfacher Ausdrücke,

b) Potenzen zusammengesetzter Ausdrücke.

2. In Bezug auf den Exponenten, nach welchem sie auch benannt werden, heißen Potenzen

a) gerade oder ungerade, je nachdem der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist,

b) positive oder negative, je nachdem er positiv oder negativ ist,

c) ganze oder gebrochene (Bruchpotenzen), je nachdem er eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

Anm. Die gewöhnliche Benennung der zweiten und dritten Potenz einer Zahl siehe §. 43, 3. Die vierte Potenz wird auch Biquadrat genannt.

§. 133.

Erkl. 1. Zwei oder mehrere Potenzen heißen, auf einander bezogen, a) gleichartig, wenn sie einerlei Dignanden haben, und derselbe Dignand in allen mit demselben Exponenten behaftet ist, z. B. $5a^3b^4c^2$ und $8\frac{4}{7}a^3b^4c^2$, außerdem sind sie b) ungleichartig.

2. Ungleichartige Potenzen, deren Dignanden einerlei Exponenten haben, werden gleichnamig genannt. Z. B. a^3b^3 und c^3d^3, ebenso 3^n, a^n und b^n.

A. Potenzirung monomischer Größen.

§. 134.

Lehrs. Gleiche Zahlen mit gleichen Exponenten potenzirt geben gleiche Potenzen.

Dat. $a = b$. — Thes. $a^n = b^n$.

Bew. Wie §. 11.

Zus. Haben (umgekehrt) zwei gleiche Potenzen a) gleiche Dignanden, so sind auch ihre Exponenten gleich, haben sie b) gleiche Exponenten, so sind auch ihre Dignanden gleich.

§. 135.

Lehrs. Werden ungleiche Zahlen, deren Werth größer als 1 ist, mit gleichen Exponenten potenzirt, so ist jene Potenz, welche den größern Dignand enthält I. die größere, wenn der Exponent positiv, II. die kleinere, wenn er negativ ist.

Dat. $a > b > 1$.

Thes. I. $a^n > b^n$. — II. $a^{-n} < b^{-n}$.

Bew. I. Die Produkte a^n und b^n bestehen aus gleichvielen Faktoren; da aber $a > b$, so ist auch $a^n > b^n$ (§. 40, Zus.).

II. Es ist $a^n > b^n$ (Nr. I.); folglich $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$ (§. 61.) oder $a^{-n} < b^{-n}$ (§. 62, Zus. 3.).

Zus. 1. Haben (umgekehrt) zwei ungleiche Potenzen den gleichen Exponenten, so gehört bei positivem Exponenten zur größern, bei negativem Exponenten zur kleinern Potenz der größere Dignand.

Zus. 2. Bei gleichem Dignand und ungleichen Exponenten ist jene Potenz, welche den größern Exponenten hat, größer oder kleiner, je nachdem der Dignand $\gtrless 1$ ist, d. h. wenn $a \gtrless 1$ und $m > n$ ist, so ist $a^m \gtrless a^n$. Denn aus $a \gtrless 1$ folgt durch Multiplikation mit a die Ungleichung $a^2 \gtrless a$, hieraus $a^3 \gtrless a^2$, dann $a^4 \gtrless a^3$ rc. (§. 40. und §. 102, Zus. 1.)

Anm. Die Multiplikation und Division von Potenzen mit einerlei Dignand sind bereits §. 45. und §. 62. abgehandelt.

§. 136.

Lehrs. Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden einzelnen Faktor mit ihr potenzirt, und die erhaltenen Potenzen multiplizirt.

Thes. $(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots\ldots$

Bew. Folgt aus dem Begriffe des Potenzirens, wenn man die Potenz in Produktform schreibt, und die gleichen Faktoren zusammenstellt (§. 37, Zus. 2.). — Ferner ergibt sich leicht die Giltigkeit des Satzes auch für einen negativen Exponenten. Denn es ist $(ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = a^{-n} . b^{-n}$ (§. 62, Zus. 3. und §. 105, Zus. 4.).

Zus. Gleichnamige Potenzen werden (umgekehrt) mit einander multiplizirt, wenn man das Produkt der Dignanden mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt. Z. B.

$$(3a)^n . (4b)^n . (2a^2b^3)^n = (3a . 4b . 2a^2b^3)^n = (24a^3b^4)^n.$$

§. 137.

Lehrs. Ein Quotient (Bruch) wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man mit ihr Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) potenzirt, und die erstere Potenz durch die letztere dividirt.

Thes. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Bew. Ergibt sich mit Zuziehung von §. 102. ganz wie §. 136. — Die Giltigkeit des Satzes für negative Exponenten folgt mittelst §. 62, Zus. 2. u. 3., dann §. 105, Zus. 2. Denn es ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^0}{b^0} : \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^{0-n}}{b^{0-n}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$$

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) den Quotienten zweier gleichnamiger Potenzen, wenn man den Quotienten der Dignanden mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

Zus. 2. Jede negative Potenz eines Bruches ist gleich der nämlichen positiven Potenz vom reciproken Werthe des Bruches. Denn es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ (§. 105, Zus. 4.).

Zus. 3. Echte Brüche werden immer kleiner, zu je höhern positiven Potenzen man sie erhebt (§. 102, Zus. 1.).

§. 138.

Lehrs. Jede Potenz eines eigentlichen Bruches ist wieder ein eigentlicher Bruch.

Bew. Es sei $\frac{a}{b}$ ein auf die einfachste Form gebrachter eigentlicher Bruch, so ist kein Faktor von b in a enthalten; deßhalb wird auch a^n durch keinen Faktor von b^n theilbar sein, weil in dem Produkte $aaaa\ldots = a^n$ kein Faktor von $bbbb\ldots = b^n$ vorkommt. Es ist somit die Behauptung richtig.

Zus. Wird ein Bruch, der auf die kleinste Benennung gebracht ist, zu irgend einer Potenz erhoben, so ist die erhaltene Potenz wieder ein Bruch von der kleinsten Benennung.

§. 139.

Lehrs. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man den Dignand der Potenz mit dem Produkte der einzelnen Exponenten potenzirt.

Thes. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Bew. Es ist nach §. 131.:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots \text{(n mal)}$$
$$= a^{m+m+m+\ldots \text{(n mal)}} \text{ (§. 45.); also}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}. \text{ — Ebenso ist}$$
$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Der Satz gilt für eine beliebige Anzahl Exponenten; denn es ist z. B. $[(a^m)^n]^p = (a^{mn})^p = a^{mnp}$; ebenso wird $([(a^2)^{-3}]^4)^{-1} = a^{24}$.

Zus. 1. Eine Zahl wird (umgekehrt) zu einer Potenz, deren Exponent ein Produkt ist, erhoben, wenn man sie nach und nach mit den einzelnen Faktoren des Produktes potenzirt. Z. B. $a^{18} = [(a^2)^3]^3$.

Zus. 2. Ist ein Ausdruck mit mehreren Exponenten zu potenziren, so ist es einerlei, in welcher Ordnung diese genommen werden. Denn es ist $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$. Z. B. $a^{30} = [(a^2)^3]^5 = [(a^3)^5]^2 = [(a^5)^3]^2$ rc.

Anm. Man hüte sich die beiden Ausdrücke $(a^m)^n$ und a^{m^n} zu verwechseln oder als gleichbedeutend zu nehmen. Der erstere zeigt an, daß a zur m^{ten} und das Resultat zur n^{ten}, der andere dagegen, daß a zu einer Potenz erhoben werden soll, deren Exponent m^n ist. Z. B. $(a^3)^4 = a^{12}$, dagegen $a^{3^4} = a^{81}$.

§. 140.

Lehrs. Jede gerade Potenz ist positiv, der Dignand mag ± sein, jede ungerade aber hat das Zeichen des Dignands.

Thes. I. $(\pm a)^{2n} = + a^{2n}$. — II. $(\pm a)^{2n+1} = \pm a^{2n+1}$.

Bew. Folgt mit Rücksicht auf den Begriff einer Potenz für beide Fälle aus §. 41, Zus. 1. und 2.; dann hinsichtlich eines negativen Exponenten mittelst §. 62, Zus. 3.

Zus. Ein Ausdruck von der Form $-a^{2n}$ kann also (Nr. I.) nie als eine Potenz des Dignands a, sondern stets nur als ein Produkt angesehen werden. Z. B. $-a^2 = (-a) \cdot (+a)$.

Anm. 1. Das Zeichen des Exponenten hat auf das Vorzeichen der Potenz keinen Einfluß.

Anm. 2. Die Grundoperationen mit Potenzen sind bereits im I. Abschnitte hinreichend behandelt worden, können daher hier übergangen werden. Von den gebrochenen Potenzen wird später gehandelt (§. 169. u. f.)

B. Quadrirung und Kubirung zusammengesetzter Ausdrücke.

§. 141.

Erkl. 1. Eine Zahl quadriren, oder zum Quadrate erheben, heißt dieselbe mit sich selbst multipliziren; ebenso kubiren oder zum Kubus erheben, das Produkt von drei gleichen Faktoren bestimmen.

2. Für die Quadrirung und Kubirung besonderer Zahlen ist nur nöthig, die Quadrate und Kuben der einzifferigen Zahlen dem Gedächtnisse einzuprägen. Diese sind in folgender Tabelle enthalten:

Wurzel =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrat =	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubus =	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Zus. 1. Jede Potenz von 10 hat im Quadrate doppelt, im Kubus dreimal so viele Nullen, als sie deren selbst enthält; denn es ist $(10^n)^{\pm 2} = 10^{\pm 2n}$, also 1 mit 2n Nullen (§. 43, Zus. 2.). Ebenso ist $(10^n)^{\pm 3} = 10^{\pm 3n}$.

Zus. 2. Eine Zahl mit rechts angehängten Nullen wird quadrirt oder kubirt, wenn man nur die bedeutenden Ziffern derselben quadrirt oder kubirt, und dem erhaltenen Quadrate doppelt, dem Kubus aber dreimal so viele Nullen anhängt, als deren der Dignand hat. Denn sie läßt sich darstellen unter der Form $a.10^n$, und es ist $(a.10^n)^2 = a^2.10^{2n}$ und $(a.10^n)^3 = a^3.10^{3n}$. Z. B.

$$800^2 = (8.10^2)^2 = 8^2.10^4 = 64.10000 = 640000.$$

$$90^3 = (9.10)^3 = 729.1000 = 729000.$$

§. 142.

Lehrs. Das Quadrat eines jeden Binoms besteht aus drei Gliedern, nämlich 1) aus dem Quadrate des ersten Gliedes, 2) aus dem doppelten Produkte beider Glieder, und 3) aus dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Thes. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Bew. Es ist $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$. Führt man die Multiplikation aus und reduzirt die sich ergebenden gleichartigen Partialprodukte, so folgt die Behauptung. — Demnach ist z. B.

$$\left(\frac{5a^2}{3} - \frac{3ab^2}{4c}\right)^2 = \left(\frac{5a^2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5a^2}{3} \cdot \frac{3ab^2}{4c} + \left(\frac{3ab^2}{4c}\right)^2$$

$$= \frac{25a^4}{9} - \frac{5a^3b^2}{2c} + \frac{9a^2b^4}{16c^2}.$$

Ebenso ist $(a \pm b)^{-2} = \frac{1}{(a \pm b)^2} = \frac{1}{a^2 \pm 2ab + b^2}$

$$= (a^2 \pm 2ab + b^2)^{-1}.$$

$$\left(\frac{2a^2}{3} + \frac{3b}{n}\right)^{-2} = \left(\frac{2a^2n + 9b}{3n}\right)^{-2} = \left(\frac{3n}{2a^2n + 9b}\right)^2$$

$$= \frac{9n^2}{4a^4n^2 + 36a^2bn + 81b^2}.$$

§. 143.

Lehrs. Bei der Quadrirung eines Polynoms gibt das erste Glied des Dignands nur sein eigenes Quadrat, jedes folgende aber gibt zwei Theile, nämlich 1) das doppelte Produkt aus ihm in die Summe aller vorangehenden Glieder und 2) sein Quadrat.

Thes. $(a+b+c+d\ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2$
$+ 2d(a+b+c) + d^2 + \ldots\ldots$

Bew. Es ist $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$; aber nach §. 142. ist

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2.$$

Enthält der Dignand vier Glieder, so wird das Quadrat wieder um zwei Theile vermehrt; denn es ist

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2 + 2d(a+b+c) + d^2,$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2 + 2d(a+b+c) + d^2.$$

Auf eben diese Art erhält man für jedes folgende Glied des Dignands zwei neue Glieder im Quadrate; daher gilt der Satz allgemein. — Z. B.

$$(5a^4-4a^3+3a^2-2a-7)^2 = 25a^8-40a^7+16a^6+6a^2(5a^4-4a^3) + 9a^4-4a(5a^4-4a^3+3a^2)+4a^2-14(5a^4-4a^3+3a^2-2a)+49.$$

Werden in diesem Ausdrucke noch die Klammern aufgelöst, und die homogenen Glieder reduzirt, so erhält man:

$$(5a^4-4a^3+3a^2-2a-7)^2 = 25a^8-40a^7+46a^6-44a^5- 45a^4+44a^3-38a^2+28a+49.$$

§. 144.

Lehrs. Wird eine beliebige (dekadische) Zahl, welche mit n Ziffern geschrieben ist, quadrirt, so kann ihr Quadrat höchstens doppelt soviele, d. i. $2n$, muß aber wenigstens doppelt soviele, weniger eine, d. i. $2n-1$, Ziffern erhalten.

Bew. Jede mit n Ziffern geschriebene Zahl liegt zwischen 10^n und 10^{n-1}; denn 10^n ist die kleinste Zahl, die mit $(n+1)$ Ziffern (nämlich 1 und n angehängten Nullen, §. 43, Zus. 2.) geschrieben wird, ebenso ist 10^{n-1} die kleinste mit n Ziffern geschriebene Zahl. Ist daher die gegebene Zahl Z, so ist

1) $Z < 10^n$, also auch $Z^2 < 10^{2n}$. Es ist aber 10^{2n} die kleinste Zahl, welche $2n+1$ Ziffern hat; daher kann Z^2 höchstens ~~ebensoviele d. i.~~ $2n$ Ziffern erhalten.

2) $Z > 10^{n-1}$, daher $Z^2 > (10^{n-1})^2$ oder $Z^2 > 10^{2n-2}$. Nun ist aber 10^{2n-2} die kleinste Zahl, welche $2n-2+1=2n-1$ Ziffern enthält; folglich muß Z^2 wenigstens ebenso viele d. i. $2n-1$ Ziffern haben. Z. B.

$$995 < 10^3, \text{ also } 995^2 < 10^6;\ 995^2 = 990025.$$
$$214 > 10^2, \text{ also } 214^2 > 10^4;\ 214^2 = 45796.$$

Zus. 1. Hat (umgekehrt) ein Quadrat m Stellen, so hat die zugehörige Wurzel entweder die Hälfte dieser Anzahl, wenn m eine gerade, oder die Hälfte von der um 1 vermehrten Anzahl, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Zus. 2. Theilt man daher eine Zahl, die man als Quadrat einer andern betrachtet, von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu je zwei Ziffern, so erhält man ebenso viele Klassen, als die Wurzel Ziffern enthält. Z. B. in jeder der Zahlen 99|00|25 und 4|57|96 hat der Dignand drei Ziffern.

§. 145.

Aufg. Eine gegebene dekadische Zahl zu quadriren.

Aufl. Man betrachte die gegebene Zahl als ein Polynom von so vielen Gliedern, als sie Ziffern enthält, nehme von der höchsten (ersten links stehenden) Ziffer nur ihr eigenes Quadrat (das aus §. 141, 2. bekannt ist), mit jeder folgenden aber bilde man zwei Bestandtheile a) das doppelte Produkt aus ihr in alle vorangehenden Ziffern, diese als eine Zahl betrachtet, und b) ihr Quadrat. Die auf solche Art sich ergebenden Resultate setze man, damit auch der Lokalwerth berücksichtigt wird, so unter einander, daß die letzte (niedrigste) Ziffer eines jeden um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite hinausrückt. Die Summe dieser Bestandtheile ist das gesuchte Quadrat.

Bew. Eine dekadische zweizifferige Zahl hat die allgemeine Form $a.10 + b$, nämlich a Zehner und b Einer. Nun ist $(a.10 + b)^2 = a^2.10^2 + 2b.a.10 + b^2$, woraus ersichtlich ist, daß das Quadrat der Zehner, nämlich a^2 an der Stelle der Hunderter, das Produkt 2ab an der Stelle der Zehner, und b^2 an der Einerstelle anfängt, also a^2 noch 2, 2ab nur eine, b^2 aber keine angehängte Nulle hätte.

Eine dreizifferige Zahl hat die Form $a.10^2 + b.10 + c$. Zum Quadrate erhoben wird

$$(a.10^2 + b.10 + c)^2 = a^2.10^4 + 2ab.10^3 + b^2.10^2$$
$$+ 2c(a.10^2 + b.10) + c^2, \text{ oder}$$
$$= a^2.10^4 + 2ab.10^3 + b^2.10^2 + 2c.(a.10 + b).10 + c^2.$$

Nun ist $a^2.10^4 = a^2$ mit 4 Nullen,
$2ab.10^3 = 2ab$ „ 3 „
$b^2.10^2 = b^2$ „ 2 „
$2c(a.10 + b).10 = 2c(a.10 + b)$ mit 1 Nulle, endlich
$c^2 = c^2$ ohne angehängte Nulle.

Für jede mehr als dreizifferige Zahl ist der Beweis derselbe.

Man sieht also, daß die letzten Ziffern der Produkte jedesmal um eine Stelle weiter gegen die Rechte fortrücken. Die angehängten Nullen werden weggelassen. Z. B.

$$\begin{array}{llll} 5764^2 = 25 \ldots\ldots & = 5^2 \ldots\ldots & = a^2 \\ \text{abcd} \quad 70 \ldots\ldots & = 2.5.7 \ldots & = 2ab \\ \quad 49 \ldots\ldots & = 7^2 \ldots\ldots & = b^2 \\ \quad 684 \ldots\ldots & = 2.6.57 \ldots & = 2c(a+b) \\ \quad 36 \ldots & = 6^2 \ldots\ldots & = c^2 \\ \quad 4608 \ldots & = 2.4.576 \ldots & = 2d(a+b+c) \\ \quad 16 \ldots & = 4^2 \ldots\ldots & = d^2; \text{ also} \end{array}$$

$$5764^2 = 33223696$$

Zus. Ein Dezimalbruch wird quadrirt, wenn man ihn ohne Rücksicht auf das Dezimalzeichen quadrirt, vom Resultate aber doppelt so viele Dezimalen abschneidet, als deren der Dignand enthält. Denn es ist $(a.10^{-n})^2 = a^2.10^{-2n}$. Man erhält z. B.

1) $3{\cdot}67^2 = 13{\cdot}4689$; 2) $0{\cdot}185^2 = 0{\cdot}034225$.

Anm. Enthält der Dignand Nullen, so gibt jede derselben im Quadrate 2 Nullen, welche man unmittelbar dem Quadrate der vorangehenden Ziffer anhängen kann. Z. B.

$$\begin{array}{r} 86009^2 = 64 \quad\quad\quad\quad\; \\ 96 \quad\quad\quad \\ 360000 \\ 154800 \\ 81 \\ \hline = 7397548081 \end{array}$$

Ebenso kann man, wenn das Quadrat einer Wurzelziffer, oder ihr doppeltes Produkt in die vorhergehende Zahl nur einzifferig ist, dasselbe unmittelbar neben, statt unter den eben vorher gebildeten Bestandtheil stellen. So erhalten wir z. B.

$$\begin{array}{r} 3{\cdot}1416^2 = 961 \quad\quad\quad \\ 248 \quad\quad \\ 16 \quad\quad \\ 6281 \\ 37692 \\ 36 \\ \hline = 9{\cdot}86965056\,. \end{array}$$

Außer diesen kann man noch manche andere Abkürzungen und Vortheile anwenden, die jedoch der mündlichen Erklärung überlassen werden müssen.

§. 146.

Lehrs. Der Kubus eines Binoms besteht immer aus vier Gliedern, nämlich 1) aus dem Kubus des ersten Theiles, 2) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles, multiplizirt mit dem

zweiten, 3) aus dem dreifachen Produkte des ersten in das Quadrat des zweiten Theiles, und 4) aus dem Kubus des zweiten Theiles.

Thes. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Bew. Es ist $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b)$. Entwickelt man noch das letzte Produkt, so erhält man die angegebene Gleichung.

Mittelst dieses Gesetzes läßt sich jedes Binom zum Kubus erheben. Z. B. man erhält unmittelbar

$$\left(\frac{2a^2b^3}{3c^{n-1}} - \frac{3a^{-1}b^{-2}}{4c^{2n}}\right)^3 = \frac{8a^6b^9}{27c^{3n-3}} - \frac{a^3b^4}{c^{4n-2}} + \frac{9b^{-1}}{8c^{5n-1}} - \frac{27a^{-3}b^{-6}}{64c^{6n}}.$$

§. 147.

Lehrs. Wird ein Polynom kubirt, so gibt 1) das erste Glied desselben nur seinen Kubus; aber 2) jedes folgende Glied gibt drei Stücke: a) das dreifache Produkt aus ihm in das Quadrat der Summe aller vorangehenden Glieder, b) das dreifache Produkt aus seinem Quadrate in die Summe aller vorangehenden Theile, endlich c) seinen Kubus.

Thes. $(a+b+c+d\ldots)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a+b)^2$
$+3c^2(a+b)+c^3+3d(a+b+c)^2$
$+3d^2(a+b+c)+d^3\ldots.$

Bew. Es sei $(a+b+c)$ zu kubiren, so ist, wenn wir $a+b$ als ein Glied betrachten:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3c(a+b)^2 + 3c^2(a+b) + c^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2\\ &\quad + 3c^2(a+b) + c^3.\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise wird, wenn man $a+b+c$ als erstes Glied ansieht:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 &= (a+b+c)^3 + 3d(a+b+c)^2\\ &\quad + 3d^2(a+b+c) + d^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a+b)^2\\ &\quad + 3c^2(a+b) + c^3 + 3d(a+b+c)^2\\ &\quad + 3d^2(a+b+c) + d^3.\end{aligned}$$

Für jedes im Dignand noch hinzukommende Glied wird der Kubus um ähnliche drei Bestandtheile vermehrt; daher der Satz allgemein giltig.

§. 148.

Lehrs. Der Kubus einer mit n Ziffern geschriebenen (dekadischen) Zahl kann nicht mehr als 3n und nicht weniger als 3n — 2 Zifferstellen erhalten.

Bew. Die gegebene Zahl sei Z, so ist

1) $Z < 10^n$, daher auch $Z^3 < 10^{3n}$. Da aber 10^{3n} die kleinste $3n+1$ Ziffern enthaltende Zahl ist, so kann Z^3 höchstens 3n Ziffern haben.

2) $Z > 10^{n-1}$, also auch $Z^3 > 10^{3n-3}$. Nun ist aber 10^{3n-3} die kleinste Zahl, welche $3n - 3 + 1 = 3n - 2$ Ziffern hat, also muß Z^3 wenigstens ebensoviele haben.

Zus. 1. Aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl, welche ein Kubus sein soll, läßt sich (umgekehrt) auf die Anzahl der Stellen des Dignands schließen, man braucht jene Anzahl nur durch 3 zu dividiren. Geht hiebei die Division nicht auf, so hat die Wurzel um eine Stelle mehr, als der ganze Quotient angibt.

Zus. 2. Theilt man daher einen gegebenen Kubus von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu je 3 Ziffern, so erhält die Wurzel immer soviele Ziffern, als man Klassen hat.

§. 149.

Aufg. Eine dekadische Zahl zum Kubus zu erheben.

Aufl. Man betrachte die gegebene Zahl als ein Polynom von sovielen Gliedern, als sie Ziffern enthält, und nehme dann von der ersten Ziffer links nur ihren Kubus (§. 141, 2.); mit jeder nachfolgenden Ziffer aber bilde man der Ordnung nach immer folgende drei Bestandtheile: a) das dreifache Produkt aus ihr in das Quadrat aller vorangehenden Ziffern (als eine Zahl betrachtet); b) das dreifache Produkt aus ihrem Quadrate in alle vorhergehenden Ziffern (als eine Zahl angesehen); c) ihren Kubus.

Die erhaltenen Resultate werden so unter einander gesetzt, daß die letzte Ziffer (rechts) von einem jeden um eine Stelle weiter gegen die Rechte hinausrückt, wodurch dann der Lokalwerth berücksichtigt ist. — Die Summe dieser Bestandtheile ist die gesuchte dritte Potenz.

Bew. Wird auf dieselbe Art geführt wie §. 145. Wir erhalten z. B. für den Kubus einer dreizifferigen Zahl, oder

$$(a.10^2+b.10+c)^3 = a^3.10^6+3a^2b.10^5+3ab^2.10^4+b^3.10^3+ 3c(10a+b)^2.10^2+3c^2(10a+b).10+c^3.$$

Z. B. Soll die Zahl 4735 zum Kubus erhoben werden, so erhält man:

$$\begin{array}{lrlll}
4735^3 & = 64 \ldots\ldots\ldots & = 4^3 \ldots\ldots & = a^3 \\
abcd & 336 \ldots\ldots\ldots & = 3.4^2.7 \ldots & = 3a^2b \\
 & 588 \ldots\ldots & = 3.4.7^2 \;. & = 3ab^2 \\
 & 343 \ldots\ldots & = 7^3 \ldots\ldots & = b^3 \\
 & 19881 \ldots\ldots & = 3.47^2.3 \;. & = 3c(a+b)^2 \\
 & 1269 \ldots & = 3.47.3^2 \;. & = 3c^2(a+b) \\
 & 27 \ldots & = 3^3 \ldots & = c^3 \\
 & 3355935 \ldots & = 3.473^2.5 & = 3d(a+b+c)^2 \\
 & 35475 \ldots & = 3.473.5^2 & = 3d^2(a+b+c) \\
 & 125 \;. & = 5^3 \ldots & = d^3;\ \text{mithin} \\
\hline
4735^3 & = 106159765375 & & = (a+b+c+d)^3.
\end{array}$$

Da $3ab^2+b^3=(3a+b)b^2$, so kann man die beiden Bestandtheile $3ab^2$ und b^3 durch eine kleine Nebenrechnung auf einmal zusammen erhalten, wodurch sich die längere Reihe von Posten reduzirt.

$$\begin{array}{lrll}
\text{Z. B.}\ 425^3 = & 64 \ldots\ldots & a^3 \ldots\ldots\ldots & = 4^3 \\
 & 96 \ldots\ldots & 3a^2b \ldots\ldots & = 3.4^2.2 \\
 & 488 \ldots & (3a+b)b^2 \ldots & = 122.2^2 \\
 & 26460 \ldots & 3(a+b)^2.c \;.. & = 3.42^2.5 \\
 & 31625 \;.. & (3(a+b)+c)c^2 \;. & = 1265.5^2. \\
\hline
 & = 76765625 & &
\end{array}$$

Zus. Ein Dezimalbruch wird kubirt, wenn man ihn ohne Rücksicht auf das Dezimalzeichen kubirt, vom Resultate aber dreimal soviele Dezimalen abschneidet, als die Wurzel hat. Denn es ist $(a.10^{-n})^3 = a^3.10^{-3n}$. So findet man z. B.

$$5{\cdot}24^3 = 143{\cdot}877824;\ \text{ebenso}$$
$$0{\cdot}027^3 = 0{\cdot}000019683.$$

Anm. Die Note zu §. 145. findet auch hier Anwendung, nur gibt hier jede Null des Dignands 3 Nullen. Z. B.

$$\begin{array}{rr}
32001^3 = & 27 \\
 & 54 \\
 & 368000000 \\
 & 30720000 \\
 & 96001 \\
\hline
 & = 32771072096001
\end{array}$$

§. 150.

Aufg. Gegebene Zahlenausdrücke zu höhern, als den bisher behandelten Potenzen zu erheben.

Aufl. und Bew. Wir unterscheiden hinsichtlich des Exponenten zwei Fälle:

I. Ist der Exponent eine zusammengesetzte Zahl, welche eine Potenz von 2 oder 3, oder ein Produkt von 2 und 3 ist, so potenzire man den Dignand nach und nach mit den Faktoren des Produktes (§. 139, Zus. 1. und 2.). Denn es ist z. B. $a^4=(a^2)^2$; $a^6=(a^3)^2$; $a^8=((a^2)^2)^2$; $a^9=(a^3)^3$; $a^{12}=((a^3)^2)^2$ rc.

Daß es, wenn der Exponent die Faktoren 2 und 3 enthält, vortheilhafter ist, zuerst zu kubiren, ist einleuchtend.

II. Ist der Exponent eine Stammzahl, welche >3 ist, oder enthält er eine solche als Faktor, so könnte man nach §. 45, Zus. verfahren, indem man z. B. $a^5=a^3.a^2=a^4.a$, ebenso $a^7=a^6.a=(a^3)^2.a$ setzt; wir werden jedoch in der Folge ein ganz einfaches Verfahren (bei den Logarithmen) kennen lernen.

II. Kap. Vom Radiziren.

§. 151.

Erkl. 1. Radiziren oder Wurzelausziehen oder auch Depotenziren heißt zu einer gegebenen Potenz und einem gegebenen Exponenten den zugehörigen Dignand bestimmen, oder jene Größe finden, welche mit einem gegebenen Exponenten potenzirt eine zweite gegebene Größe als Potenz gibt.

Die gegebene Potenz wird hier Radikand, der Exponent Radikator oder Wurzelexponent, der zu suchende Dignand die Wurzel genannt.

2. Man bezeichnet das Radiziren dadurch, daß man dem Radikand das Zeichen „$\sqrt{\ }$" vorsetzt, welches Wurzelzeichen genannt wird, und in dasselbe den Radikator schreibt.

3. Die allgemeine Form, wenn a einen beliebigen Radikand, n den Radikator bezeichnet, ist $\sqrt[n]{a}$, gelesen „n[te] Wurzel aus a" oder „a radizirt durch n".

Ist der Radikand ein zusammengesetzter Ausdruck, z. B. $a^2 \pm 5bn$, so schreibt man entweder $\sqrt[n]{(a^2 \pm 5bn)}$, oder $\sqrt[n]{a^2 \pm 5bn}$.

Zus. 1. Eine Wurzel mit ihrem Radikator potenzirt gibt den Radikand; d. h. es ist $(\sqrt[n]{a})^n = a$. (Nach dem Begriffe des Radizirens.)

Zus. 2. Eine Potenz durch ihren Exponenten radizirt gibt den Dignand; d. h. $\sqrt[n]{a^n} = a$. Denn es ist a die Zahl, welche mit n potenzirt a^n gibt.

Zus. 3. Eine Zahl bleibt ihrem Werthe nach ungeändert, wenn man sie entweder a) durch irgend eine Zahl radizirt, und die erhaltene Wurzel mit derselben Zahl potenzirt, oder b) mit einer beliebigen Zahl potenzirt, und die erlangte Potenz durch die nämliche Zahl radizirt. (Umkehrung der Zuss. 1. und 2.)

Zus. 4. Die erste Wurzel aus einer Zahl ist sie selbst, d. h. $\sqrt[1]{a} = a$; denn es ist $a^1 = a$.

§. 152.

Erkl. 1. Die Wurzeln werden, wie die Potenzen nach dem Radikator benannt, und heißen vom sovielten Grade, als dieser angibt. Ueberdieß unterscheidet man nach Beschaffenheit des Radikators, wie bei den Potenzen, a) gerade oder ungerade, b) positive oder negative, c) ganze oder gebrochene Wurzeln.

2. Die zweite Wurzel nennt man gewöhnlich Quadratwurzel, die dritte Kubikwurzel, die vierte Biquadratwurzel.

Den Radikator 2 pflegt man nicht zu schreiben; und es ist stets dieser zu verstehen, wenn das Wurzelzeichen keinen Radikator hat, d. h. es ist stets $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

§. 153.

Erkl. 1. Jede Größe, welche das Wurzelzeichen vor sich hat, die also durch irgend eine Zahl radizirt werden soll, heißt eine Wurzelgröße.

2. Eine Zahl, welche vor dem Wurzelzeichen steht, die also angibt, wie oft die Wurzelgröße zu nehmen sei, wird Wurzelkoëffizient oder Faktor derselben genannt.

Z. B. In dem Ausdrucke $\frac{4}{5}m\sqrt[3]{5a^2}$ ist $\sqrt[3]{5a^2}$ die Wurzelgröße, $\frac{4}{5}m$ der Wurzelkoëffizient.

3. Haben Wurzelgrößen, welche auf einander bezogen werden, einerlei Radikanden und Radikatoren, so nennt man sie gleichartig, z. B. $5\sqrt[n]{4a^2b}$ und $7b\sqrt[n]{4a^2b}$, außerdem ungleichartig.

Die letztern werden gleichnamig genannt, wenn sie dieselben Radikatoren haben, z. B. $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{m}$, sonst ungleichnamig, z. B. $\sqrt[4]{a}$ und $\sqrt[n]{a}$.

Zus. Jede Größe läßt sich (unbeschadet ihres Werthes) als Wurzelgröße mit beliebigem Radikator darstellen, wenn man sie zugleich mit diesem potenzirt (§. 151, Zus. 3. b).

A. Wurzeln aus monomischen Größen.

§. 154.

Lehrs. Es ist I. jede Wurzel aus 1 wieder 1, II. jede Wurzel aus 0 wieder 0.

Thes. I. $\sqrt[n]{1} = 1$. — II. $\sqrt[n]{0} = 0$.

Bew. I. Folgt aus §. 43, Zus. 1., und
II. aus §. 131, Zus.

Zus. 1. Die Einheit kann man (umgekehrt) als Wurzelgröße mit beliebigem Radikator betrachten.

Zus. 2. Eine Nullte Wurzel gibt es aus keiner von 1 verschiedenen Zahl. Denn da $a^0 = 1$ ist, so gibt es keine Zahl, die mit 0 potenzirt eine von 1 verschiedene Zahl hervorbringt (§. 62, Zus. 2.).

§. 155.

Lehrs. Gleiche (positive) Wurzeln aus gleichen Zahlen sind einander gleich.

Dat. $a = b$.

Thes. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

Bew. Ganz ähnlich §. 11.

Zus. Zu gleichen Wurzeln mit gleichen Radikatoren gehören (umgekehrt) auch gleiche Radikanden, und zu gleichen Wurzeln aus gleichen Radikanden gehören gleiche Radikatoren.

§. 156.

Lehrs. Von gleichen (positiven) Wurzeln aus ungleichen Zahlen ist die aus dem größern Radikand die größere.

Dat. $a > b$.

Thes. $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Bew. Gesetzt die Behauptung wäre unrichtig, so müßte $\sqrt[n]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[n]{b}$, also auch $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \overline{\overline{<}} \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ (§. 134. und §. 135.), d. i. $a \overline{\overline{<}} b$ sein, was der Voraussetzung widerstreitet.

§. 157.

Lehrs. Man kann das Zeichen eines negativen Radikators ändern, wenn man zugleich das Zeichen des Potenzexponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

Thes. $\sqrt[-n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{-m}}$.

Bew. Ist die Behauptung richtig, so muß $\sqrt[n]{a^{-m}}$ mit dem Radikator $-n$ potenzirt den Radikand a^m geben. Nun ist aber
$$\left(\sqrt[n]{a^{-m}}\right)^{-n} = \left(\left(\sqrt[n]{a^{-m}}\right)^n\right)^{-1} = (a^{-m})^{-1}, \text{ (§. 151, Zus. 1.)}$$
$$= a^m \text{ (§. 139.)}.$$

Zus. 1. Eine negative Wurzel aus einem Bruche ist derselben positiven Wurzel aus dem reciproken Werthe des Bruches gleich. Denn es ist $\sqrt[-n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

Zus. 2. Negative Wurzelexponenten lassen sich also gänzlich vermeiden, was auch gewöhnlich geschieht.

§. 158.

Lehrs. Ein Produkt wird durch eine Zahl radizirt, wenn man jeden Faktor durch sie radizirt, und die erhaltenen Wurzeln mit einander multiplizirt.

Thes. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Bew. Ist die zweite Seite vorstehender Gleichung richtig, so muß sie mit dem Radikator n potenzirt den Radikand der ersten Seite, d. i. ab geben. Es ist aber

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \text{ (§. 136.), also}$$
$$= a \cdot b = ab \text{ (§. 151, Zus. 1.).}$$

Der Satz gilt für beliebig viele Faktoren.

Zus. 1. Gleichnamige Wurzelgrößen werden (umgekehrt) mit einander multiplizirt, wenn man das Produkt der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radizirt. Z. B.

$$\sqrt{3a^5} \cdot \sqrt{2a^{-3}b} \cdot \sqrt{6b} = \sqrt{36a^2b^2} = \sqrt{(6ab)^2} = 6ab.$$

Zus. 2. Jeder Wurzelkoëffizient läßt sich als Faktor unter das Wurzelzeichen bringen, wenn man ihn zur Potenz des Radikators erhebt. Denn es ist $a = \sqrt[n]{a^n}$ (§. 151, Zus. 3.); daher $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$. Z. B.

$$\frac{2a}{3}\sqrt[3]{54a^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{3}\right)^3 \cdot 54a^2} = \sqrt[3]{16a^5}.$$

Zus. 3. Läßt sich (umgekehrt) der Radikand in ein Produkt auflösen, in welchem ein Faktor eine Potenz vom Grade des Radikators ist, so kann dieser als Wurzelkoëffizient vor das Wurzelzeichen gebracht werden. Z. B.

$$\sqrt{75a^2} = \sqrt{25a^2 \cdot 3} = \sqrt{(5a)^2} \cdot \sqrt{3} = 5a\sqrt{3}.$$

§. 159.

Lehrs. Ein Quotient (Bruch) wird durch eine Zahl radizirt, wenn man Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) durch sie radizirt, und die Wurzel des erstern durch die des letztern dividirt.

Thes. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Bew. Wird mit Anwendung von §. 137. ganz so geführt wie §. 158.

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) den Quotienten zweier gleichnamiger Wurzelgrößen, wenn man den Quotus der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radizirt. Z. B.

$$\frac{\sqrt[3]{72a^5}}{\sqrt[3]{9a^2}} = \sqrt[3]{\frac{72a^5}{9a^2}} = \sqrt[3]{8a^3} = \sqrt[3]{(2a)^3} = 2a .$$

Zus. 2. Jede negative Wurzel aus einer Zahl ist einem Bruche gleich, dessen Zähler 1, dessen Nenner dieselbe positive Wurzel aus dieser Zahl ist. Denn es ist (nach §. 157.)

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} .$$

§. 160.

Lehrs. Eine Potenz wird durch eine Zahl radizirt, wenn man entweder I. ihren Dignand durch sie radizirt, und die erhaltene Wurzel durch den Potenzexponenten potenzirt; oder II. den Potenzexponenten (wenn er theilbar ist) durch den Radikator dividirt, und mit dem Quotus den Dignand potenzirt.

Thes. I. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$. — II. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$.

Bew. I. Potenzirt man die zweite Seite der Gleichung mit n, so folgt $\left((\sqrt[n]{a})^m\right)^n = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^m$ (§. 139, Zus. 2.)

$= a^m$. Ebenso ist

II. $(a^{m:n})^n = a^{(m:n) \cdot n} = a^m$ (§. 139. und §. 48, Zus. 1.).

Zus. 1. Eine Wurzelgröße wird potenzirt, wenn man ihren Radikand potenzirt, und die erhaltene Potenz durch den Wurzelexponenten radizirt. (Umkehrung von I.)

Zus. 2. Ist ein Ausdruck mit einer Zahl zu potenziren und durch eine andere zu radiziren, so ist es einerlei, in welcher Ordnung dieß geschieht.

§. 161.

Lehrs. Aus einer Wurzel wird noch einmal eine Wurzel ausgezogen, wenn man den Radikand durch das Produkt der Wurzelexponenten radizirt.

Thes. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Bew. Erhebt man beide Seiten zur mn^ten^ Potenz, so erhält man (nach §. 139, Zus. 1. und §. 151, Zus. 1.):

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a = \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn}.$$

Der Satz ist für beliebig viele Radikatoren giltig.

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) eine Wurzel, deren Radikator ein Produkt ist, wenn man den Radikand nach und nach durch die Faktoren dieses Produktes radizirt. Z. B.

$$\sqrt[6]{8a} = \sqrt[3]{\sqrt{8a}}\,;\quad \sqrt[12]{2b} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2b}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2b}}}.$$

Zus. 2. Soll eine Wurzelgröße mit einem Wurzelkoëffizienten radizirt werden, so bringe man letztern (§. 158, Zus. 2.) zuerst unter das Wurzelzeichen. Z. B.

$$\sqrt{2a\sqrt[3]{3b\sqrt{5a}}} = \sqrt{2a\sqrt[6]{(3b)^2 . 5a}} = \sqrt{\sqrt[6]{(2a)^6 . 45ab^2}}$$
$$= \sqrt[12]{64 . 45a^7b^2} = \sqrt[12]{2880a^7b^2}.$$

§. 162.

Lehrs. Eine Wurzelgröße wird ihrem Werthe nach nicht geändert, wenn man den Wurzel- und Potenzexponenten mit der nämlichen Zahl I. multiplizirt, oder II. wenn sie theilbar sind, durch dieselbe Zahl dividirt.

Thes. I. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. — II. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}$.

Bew. I. Es ist vermöge §. 151, Zus. 3., dann §. 160, Zus. 1. (mit Rücksicht auf §. 139.):

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[np]{a^{mp}}\,.$$

II. Kehrt man den vorigen Fall um, so hat man

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np:p]{a^{mp:p}}\,;$$

daher allgemein, wenn n und m Vielfache von q sind,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:q]{a^{m:q}}\,.$$

Zus. 1. Vermöge des ersten Falles läßt sich also jede Wurzelgröße in eine andere verwandeln, deren Radikator irgend ein Vielfaches des gegebenen ist; vermöge des zweiten aber kann eine Wurzelgröße in ihrer einfachsten Gestalt dargestellt werden, wenn Wurzel- und Potenzexponent einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Z. B.

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[12]{a^6}\,;$$ umgekehrt ist

$$\sqrt[15]{a^5} = \sqrt[3]{a}\,;\quad \sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}\,.$$

Zus. 2. Eine Wurzelgröße, deren Radikator ein Bruch ist, ist einer andern gleich, welche den Zähler des Bruches als Radikator, den Nenner aber als Potenzexponenten hat. Denn es ist $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot n]{a^n} = \sqrt[m]{a^n}$. Demnach wird z. B. $\sqrt[\frac{1}{2}]{a} = a^2$, d. h. —

Zus. 3. Eine Wurzelgröße wird mit einer Zahl, durch welche der Radikator theilbar ist, potenzirt, wenn man den letztern durch die Zahl dividirt, und mit dem Quotus den Radikand radizirt. Denn $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:m]{a^{m:m}} = \sqrt[n:m]{a}$. So ist z. B. $\left(\sqrt[8]{a}\right)^4 = \sqrt{a}$.

§. 163.

Aufg. Ungleichnamige Wurzelgrößen gleichnamig zu machen.

Aufl. u. Bew. Man suche das kleinste gemeinschaftliche

Vielfache der vorhandenen Radikatoren, und verwandle alle gegebenen Ausdrücke in Wurzelgrößen, welche dieses Vielfache als Radikator haben. Die Richtigkeit beruht auf §. 162, I.

Z. B. $\sqrt[3]{2a}$, $\sqrt[4]{b^2}$, $\sqrt{3c}$ und $\sqrt[6]{ab}$ haben als kleinstes gemeinschaftliches Vielfache der Radikatoren 12, wir erhalten daher

$$\sqrt[12]{(2a)^6}, \quad \sqrt[12]{(b^2)^4}, \quad \sqrt[12]{(3c)^3} \text{ und } \sqrt[12]{(ab)^2}, \text{ oder}$$

$$\sqrt[12]{64a^6}, \quad \sqrt[12]{b^8}, \quad \sqrt[12]{27c^3} \text{ und } \sqrt[12]{a^2b^2}.$$

Zus. 1. Hiernach läßt sich auch entscheiden, welche von zwei gegebenen Wurzelgrößen dem Werthe nach die größere ist. Z. B.

$$\sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{512}; \quad \sqrt[3]{23} = \sqrt[6]{23^2} = \sqrt[6]{529}.$$

Nun ist $\sqrt[6]{512} < \sqrt[6]{529}$ (§. 156.); also $\sqrt{8} < \sqrt[3]{23}$.

Zus. 2. Von ungleichen Wurzeln aus einer Zahl ist die mit dem größern Radikator a) die kleinere, wenn der Radikand größer als 1, b) die größere, wenn der Radikand kleiner als 1 ist; d. h. wenn $m > n$ und $a \gtrless 1$, so ist $\sqrt[m]{a} \lessgtr \sqrt[n]{a}$. Denn macht man beide Wurzeln gleichnamig, so wird $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n}$ und $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$. Wenn nun

a) $a > 1$, so ist $a^m > a^n$ (§. 135, Zus. 2.); daher auch $\sqrt[mn]{a^m} > \sqrt[mn]{a^n}$, d. i. $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$. Ist dagegen

b) $a < 1$, so ist auch $a^m < a^n$; folglich $\sqrt[mn]{a^m} < \sqrt[mn]{a^n}$ d. i. $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$.

Zus. 3. Eine Wurzel aus einem unechten Bruche ist also um so kleiner, aus einem echten aber um so größer, je größer der Radikator ist.

§. 164.

Erkl. 1. Jede Zahl, welche sich genau in soviele vollkommen gleiche Faktoren auflösen läßt, als ein gegebener Exponent Ein=

heiten enthält, heißt eine vollkommene Potenz vom Grade dieses Exponenten, außerdem eine unvollkommene. So ist z. B. 64 eine vollkommene Potenz des zweiten, dritten und sechsten Grades, da $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$ ist, dagegen eine unvollkommene des vierten und fünften Grades.

2. Eine Wurzel aus einer Zahl heißt

a) rational oder vollständig, wenn der Radikand eine vollkommene Potenz vom Grade des Radikators ist, die Wurzel sich also genau darstellen läßt;

b) irrational oder unvollständig, wenn sie weder durch eine ganze, noch durch eine gebrochene Zahl vollkommen genau ausgedrückt werden kann.

Ueberhaupt wird jede Zahl, die sich nicht vollständig, sondern nur näherungsweise darstellen läßt, eine Irrationalzahl genannt. (Vgl. §. 109, 2. b).

Anm. Die vollkommenen Potenzen des zweiten Grades heißen gewöhnlich Quadrat-, die des dritten Kubikzahlen.

§. 165.

Lehrs. Fällt eine Wurzel aus einer ganzen Zahl zwischen zwei nur um 1 verschiedene Zahlen, so ist sie irrational.

Dat. $r < \sqrt[n]{a} < (r + 1)$.

Bew. Da $\sqrt[n]{a} > r$ und $\sqrt[n]{a} < (r + 1)$, so müßte die Wurzel r mit einem echten Bruche sein, den man sich zugleich als irreducibl vorstellen kann. Setzen wir daher

$\sqrt[n]{a} = r + \frac{p}{q} = \frac{qr + p}{q}$, so müßte $a = \left(\frac{qr + p}{q}\right)^n = \frac{(qr + p)^n}{q^n}$

sein, was unmöglich ist (§. 138.), da keine Potenz eines eigentlichen Bruches einer ganzen Zahl gleich sein kann.

Zus. 1. Ist also die Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht wieder eine ganze Zahl, so ist sie irrational.

Zus. 2. Algebraische Ausdrücke sind als irrational zu betrachten, wenn nur ein Potenzexponent des Radikands nicht durch den Radikator theilbar ist.

Zus. 3. Eine Wurzel aus einem Bruche, dessen Nenner irrational ist, läßt sich immer in eine andere mit rationalem Nenner des Bruches verwandeln, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer Potenz des Nenners multiplizirt, deren Exponent den Exponenten des Nenners zum Radikator oder einem Vielfachen von ihm ergänzt. Z. B.

$$1)\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \,.\, b^2}{b \,.\, b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b};$$

$$2)\ \sqrt[6]{\frac{ab}{3^7}} = \sqrt[6]{\frac{ab \,.\, 3^5}{3^7 \,.\, 3^5}} = \sqrt[6]{\frac{3^5ab}{3^{12}}} = \frac{\sqrt[6]{3^5ab}}{3^2} = \frac{1}{9}\sqrt[6]{3^5ab}\,.$$

§. 166.

Aufg. Wurzelgrößen zu addiren oder zu subtrahiren.

Aufl. u. Bew. Man addire oder subtrahire die Koëffizienten der gleichartigen Größen, befolge überhaupt alle bei der Addition und Subtraktion gegebenen Regeln. Die Richtigkeit des Verfahrens stützt sich auf §. 35, Zus. 2. Z. B. für

$$(4\sqrt{2} - 7\sqrt[3]{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt[4]{7}) \pm (5\sqrt[3]{3} - 8\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{7} + \sqrt{2})$$

erhalten wir, wenn wir die gleichartigen Bestandtheile unter einander setzen:

$$4\sqrt{2} - 7\sqrt[3]{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt[4]{7}$$

$$\pm\,(\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{3} - 8\sqrt{5} + 2\sqrt[4]{7});$$ daher die

$$\text{Summe} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{7}$$

$$\text{Differenz} = 3\sqrt{2} - 12\sqrt[3]{3} + 16\sqrt{5} - 5\sqrt[4]{7}\,.$$

Zus. Bisweilen lassen sich ungleichartige Wurzelgrößen dadurch gleichartig machen, daß man den Radikand in zwei Faktoren zerlegt, von denen einer rational ist, also sich vor das Wurzelzeichen schaffen läßt (§. 158, Zus. 3.). Z. B.

$$\sqrt[3]{81} + \sqrt{28} - 3\sqrt[3]{24} + 2\sqrt{63} + 2\sqrt[3]{192} - \sqrt{175}$$
$$= \sqrt[3]{27.3} + \sqrt{4.7} - 3\sqrt[3]{8.3} + 2\sqrt{9.7} + 2\sqrt[3]{64.3} - \sqrt{25.7}$$
$$= 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{7} - 6\sqrt[3]{3} + 6\sqrt{7} + 8\sqrt[3]{3} - 5\sqrt{7}$$
$$= 5\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{7}\,.$$

§. 167.

Aufg. Wurzelgrößen mit einander zu multipliziren.

Aufl. u. Bew. Sind die gegebenen Faktoren I. einfache Ausdrücke, so mache man sie, falls sie es nicht schon sind, gleichnamig, und verfahre dann nach §. 158, Zus. 1. Das Produkt der Wurzelkoëffizienten ist der Koëffizient des Resultates. Denn es ist

$$p\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[n]{b} = pq\sqrt[n]{ab}\,; \text{ ebenso}$$
$$p\sqrt[n]{a} \times q\sqrt[m]{b} = p\sqrt[mn]{a^m} \times q\sqrt[mn]{b^n} = pq\sqrt[mn]{a^m b^n}\,. \text{ — Z. B.}$$

1) $$5 \times -2\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \times \frac{7}{6}\sqrt[4]{\frac{10}{3}} \times -1\frac{1}{5}\sqrt[4]{0{\cdot}75} = 14\sqrt[4]{\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}}$$
$$= 14\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 14\sqrt[4]{\frac{3.8}{16}} = \frac{14\sqrt[4]{24}}{2} = 7\sqrt[4]{24}\,.$$

2) $$\frac{4a^2}{3b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-m}}\cdot\frac{5b}{7a}\sqrt{\frac{a-m}{2a^3}} = \frac{20a}{21}\sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{a-m}\right)^2\cdot\left(\frac{a-m}{2a^3}\right)^3}$$
$$= \frac{20a}{21}\sqrt[6]{\frac{a^4(a-m)^3}{(a-m)^2.8a^9}} = \frac{20a}{21}\sqrt[6]{\frac{a-m}{8a^5}}$$
$$= \frac{20a}{21}\sqrt[6]{\frac{8a(a-m)}{64a^6}} = \frac{10}{21}\sqrt[6]{8a(a-m)}\,.$$

II. Für zusammengesetzte Faktoren gelten außer dem vorhin Gesagten auch noch die Multiplikationsregeln des ersten Abschnittes. Z. B.

$$1)\ 2\sqrt[3]{3} \times \left(\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2\frac{2}{3}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{3}} + 3\sqrt[3]{2}\right)$$

$$= 2\sqrt[3]{27} - 4\sqrt[3]{3.\frac{8}{3}} + 8\sqrt[3]{3.\frac{1}{3}} + 6\sqrt[3]{6}$$

$$= 6 - 8 + 8 + 6\sqrt[3]{6} = 6(1 + \sqrt[3]{6}).$$

$$2)\ (3-2\sqrt{3})^3 = 27-3.9.2\sqrt{3}+3.3.(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^3$$

$$= 27 - 54\sqrt{3} + 108 - 24\sqrt{3}$$

$$= 135 - 78\sqrt{3}.$$

§. 168.

Aufg. Wurzelgrößen durch einander zu dividiren.

Aufl. u. Bew. Man schreibe die Division in Bruchesform an, und suche diesen Bruch in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner rational ist, wobei auf folgende Weise verfahren wird:

I. Ist der Divisor ein Monom und a) mit dem Dividend gleichnamig, so verfahre man nach §. 159, Zus. 1. Z. B.

$8\sqrt{42} : 4\sqrt{6} = \dfrac{8\sqrt{42}}{4\sqrt{6}} = 2\sqrt{\dfrac{42}{6}} = 2\sqrt{7}$. — Sind aber

b) beide ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig, und verfahre wie bei a) oder multiplizire Zähler und Nenner des Bruches mit einer dem Divisor gleichnamigen Wurzelgröße, welche denselben Radikand hat, aber mit einem Exponenten, der den gegebenen zu einem Vielfachen des Radikators ergänzt. Denn es ist (wenn z einen beliebigen Dividend bezeichnet)

$$z : \sqrt[n]{a^m} = \frac{\sqrt[n]{z^n}}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{z^n}{a^m}}, \text{ oder}$$

$$= \frac{z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{z\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{z\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a},$$

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[6]{75^3}}{\sqrt[6]{25^2}} = \sqrt[6]{\frac{25^3 . 3^3}{25^2}} = \sqrt[6]{25.27} = \sqrt[6]{675}$, oder

$$= \frac{\sqrt{75} . \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25} . \sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt{25.3} . \sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{5\sqrt{3} . \sqrt[3]{5}}{5} = \sqrt{3} . \sqrt[3]{5}.$$

2) $\frac{2ab}{3\sqrt{a\sqrt{b}}} = \frac{2\sqrt[4]{a^4 b^4}}{3\sqrt{\sqrt{a^2 b}}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{a^4 b^4}{a^2 b}} = \frac{2}{3}\sqrt[4]{a^2 b^3} = \frac{2}{3}\sqrt{ab\sqrt{b}}.$

II. Ist der Divisor zusammengesetzt, so schreibe man wieder die Division in Bruchesform an, und multiplizire den Zähler und Nenner, wenn der letztere ein irrationales Binom ist, das bloß Quadratwurzeln enthält, mit einem Ausdrucke, der sich von dem gegebenen Nenner nur durch das Zeichen des zweiten Gliedes unterscheidet. Die Fälle, welche hiebei eintreten können, sind, wenn wir den Dividend (Zähler) allgemein mit z bezeichnen, folgende:

a) $\frac{z}{a \pm \sqrt{b}} = \frac{z(a \mp \sqrt{b})}{(a \pm \sqrt{b})(a \mp \sqrt{b})} = \frac{z(a \mp \sqrt{b})}{a^2 - b}.$

Z. B. $\frac{5}{3 + \sqrt{3}} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{5(3 - \sqrt{3})}{9 - 3}$

$$= \tfrac{5}{6}(3 - \sqrt{3}).$$

Ebenso ergibt sich $z : (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$, oder

$$\frac{z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})} = \frac{z(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}.$$

$$\text{Z. B.}\quad \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}$$

$$= \frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{14-4\sqrt{12}}{8-6}$$

$$= 7-4\sqrt{3}.$$

Dieser Fall läßt sich auch noch anwenden bei Quotienten von der Form

$$z:(\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}),\ \text{dann}\ z:(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}).$$

b) Ist der Nenner irgend eine Wurzel aus einem irrationalen Binom, so kann man Nr. I. b) anwenden, und man erhält dann

$$\frac{z}{\sqrt[n]{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}} = \sqrt[n]{\frac{z^n}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}} = \sqrt[n]{\frac{z^n(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}}.\ \text{Z. B.}$$

$$\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt[3]{\sqrt{3a}-\sqrt{2a}}} = \sqrt[6]{\frac{(5a)^3}{(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})^2}} = \sqrt[6]{\frac{125a^3}{5a-2a\sqrt{6}}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{125a^2}{5-2\sqrt{6}}} = \sqrt[6]{\frac{125a^2(5+2\sqrt{6})}{25-24}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{25a^2.5(5+2\sqrt{6})}} = \sqrt[3]{5a\sqrt{5(5+2\sqrt{6})}}.$$

c) Ist der Divisor ein irrationales Trinom, so kann man ihn durch wiederholte Anwendung der Regel II. a) gleichfalls rational machen; denn für $z:(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c})$ erhält man:

$$\frac{z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{z[(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\mp\sqrt{c}]}{[(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\pm\sqrt{c}][(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\mp\sqrt{c}]}$$

$$=\frac{z(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2-c}$$

$$=\frac{z(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{a\pm 2\sqrt{ab}+b-c}$$

$$=\frac{z(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{m\pm 2\sqrt{ab}},$$

wenn man den rationalen Theil $a+b-c=m$ setzt. Der letzte Nenner kann nach a) rational gemacht werden. — Auf diesem Wege findet man z. B.

$$\frac{12}{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}\,.$$

Dieses Verfahren läßt sich auch noch anwenden, wenn der Nenner vier irrationale Quadratwurzeln enthält, also die Form

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\pm\sqrt{d}=(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\pm(\sqrt{c}+\sqrt{d})$$

hat; zugleich ist ersichtlich, daß sich auf ähnliche Art auch der Zähler eines Bruches rational machen lasse.

§. 169.

Erkl. 1. Man pflegt eine Wurzel aus einer Zahl (Potenz), auch wenn der Potenzexponent nicht durch den Radikator theilbar ist, dadurch anzudeuten, daß man letztern als Nenner eines Bruches unter den Potenzexponenten setzt; indem man also $a^{\frac{m}{n}}$ statt $\sqrt[n]{a^m}$ schreibt.

2. Eine so angezeigte Wurzel nennt man eine gebrochene Potenz oder Bruchpotenz, der Exponent selbst wird ein gebrochener oder Bruchexponent genannt.

3. Eine Bruchpotenz heißt rational, wenn der Bruchexponent ein uneigentlicher, irrational, wenn er ein eigentlicher Bruch ist. (Vergl. §. 160, II.).

4. Die Bruchexponenten werden ganz als Brüche behandelt.

Anm. Die Bruchpotenzen sind eigentlich keine Potenzen, sondern haben nur eine ähnliche Form; denn nach der Erklärung einer Potenz kann der Exponent keine gebrochene Zahl sein, indem eine Anzahl von Dingen nie ein Bruch sein kann.

§. 170.

Lehrs. Alle Rechnungsregeln für Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch für Bruchpotenzen, wenn man ihre Exponenten wie Brüche behandelt.

Bew. Es ist hier nur zu beweisen, daß die Resultate, welche man erhält, wenn man mit Bruchpotenzen wie mit ganzen operirt, die nämlichen sind, wie wenn man sie als Wurzelgrößen behandelt, und das Resultat als Bruchpotenz darstellt.

1) Hinsichtlich der Multiplikation ist

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}} = a^{\frac{ms + nr}{ns}}; \text{ ebenso}$$

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}},$$

welches Resultat mit dem vorigen übereinstimmt.

Auf dieselbe Weise findet man

2) hinsichtlich der Division zweier Bruchpotenzen:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{ms-nr}{ns}}.$$

3) Hinsichtlich der Potenzirung von Produkten und Quotienten:

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m}, \text{ und}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}.$$

4) In Bezug auf die Potenzirung einer Potenz ergibt sich:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{mr}{ns}} = \sqrt[s]{(\sqrt[n]{a^m})^r}.$$

Die Regeln sind auch giltig, wenn die Bruchexponenten negativ sind.

§. 171.

Lehrs. In Hinsicht der Qualität kann I. eine gerade Wurzel aus einem positiven Radikand positiv oder negativ sein; II. eine

gerade Wurzel aus einem negativen Radikand ist unmöglich; III. jede ungerade Wurzel erhält das Zeichen des Radikands.

Thes. I. $\sqrt[2n]{+a} = \pm\sqrt[2n]{a}$. — II. $\sqrt[2n]{-a}$ ist unmöglich.

III. $\sqrt[2n+1]{\pm a} = \pm\sqrt[2n+1]{a}$.

Bew. Ergibt sich mit Rücksicht auf §. 151. mittelst §. 140.

Z. B. $\sqrt{64a^2} = \pm 8a$; $\sqrt[6]{64a^4b^6c^{-12}} = \pm 2bc^{-2}\sqrt[3]{a^2}$.

$\sqrt[3]{8a^3} = +2a$; $\sqrt[3]{-27a} = -\sqrt[3]{27a} = -3\sqrt[3]{a}$.

Anm. Eine gerade Wurzel hat nur dann ein doppeltes Zeichen (d. h. ist $\pm$), wenn man die Art der Entstehung des Radikands nicht kennt. Demnach ist z. B. $\sqrt{a^2} = \pm a$, weil $(\pm a)^2 = a^2$ ist; dagegen ist nur $\sqrt{(+a)^2} = +a$, und $\sqrt{(-a)^2} = -a$.

§. 172.

Erkl. 1. Alle Wurzeln aus positiven, sowie die ungeraden Wurzeln aus negativen Zahlen nennt man reelle, mögliche oder wirkliche Größen (welche rational oder irrational sein können).

2. Die geraden Wurzeln aus negativen Zahlen heißen unmögliche, eingebildete oder imaginäre Größen.

Die imaginären Größen sind bloße Zahlformen, die unter der Form einer Wurzel enthalten sind, keine eigentlichen Zahlen. Ihr Erscheinen im Resultate einer Rechnung zeigt an, daß die Aufgabe etwas Unmögliches, Ungereimtes oder Widersprechendes verlange.

3. Es gibt eigentlich nur eine einzige imaginäre Größe, nämlich die Quadratwurzel aus der negativen Einheit; denn es ist

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a.-1} = \sqrt[2n]{a}.\sqrt[2n]{-1} = \pm r\sqrt[2n]{-1}$$

$$= \pm r\sqrt[n]{\sqrt{-1}}.$$

Man setzt gewöhnlich den Ausdruck $\sqrt{-1} = i$ (Anfangsbuchstabe des Wortes imago), und die allgemeine Form einer imaginären Größe ist somit $r\sqrt{-1} = ri$.

Anm. 1. In Bezug auf die Potenzirung des Ausdruckes $\sqrt{-1} = i$, von dem man nur weiß, daß $i^2 = -1$ ist, mag hier noch bemerkt werden, daß man stets vor der Potenzirung den Wurzel- und Potenzexponenten durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß abkürzen muß, wobei man dann folgendes Gesetz erhält:

a) jede gerade Potenz von i ist eine mögliche Zahl, nämlich ± 1, je nachdem der Potenzexponent durch 4 oder nur durch 2 theilbar ist, also die Form $4n$ oder $4n + 2$ hat;

b) jede ungerade Potenz von i ist imaginär, nämlich $\pm i$, je nachdem der Potenzexponent durch 4 getheilt 1 oder 3 als Rest läßt, also die Form $4n + 1$ oder $4n + 3$ hat. — Demnach ergeben sich folgende Formeln:

1) $(i)^{4n} = [(i)^2]^{2n} = (-1)^{2n} = +1$.

2) $(i)^{4n+2} = i^{4n} . i^2 = +1 . -1 = -1$.

3) $(i)^{4n+1} = i^{4n} . i = +1 . i = +\sqrt{-1}$.

4) $(i)^{4n+3} = i^{4n} . i^3 = +1 . i^2 . i = 1 . -1 . i = -\sqrt{-1}$.

Anm. 2. Mit Anwendung von $\sqrt{-1}$ läßt sich nun auch ein Ausdruck von der Form $a^{2m} + b^{2n}$ in zwei binomische Faktoren zerfällen. (Vgl. §. 79, I, a.) Es ist z. B. $a^2 + b^2 = a^2 - b^2 i^2 = (a + bi)(a - bi)$.

B. Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken.

§. 173.

Aufg. Aus einem zusammengesetzten algebraischen Ausdrucke die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl. u. Bew. Da das Radiziren eine dem Potenziren gerade entgegengesetzte Operation ist, so muß auch zur Lösung unserer Aufgabe der umgekehrte Weg eingeschlagen werden, der zum Quadrate eines zusammengesetzten Ausdruckes geführt hat. — Es sei daher

I. der gegebene Ausdruck ein vollkommenes Quadrat, so verfahre man mit steter Rücksicht auf die Formel des §. 143.:
$(a + b + c + \ldots)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 \ldots\ldots,$
und zwar auf folgende Art:

1) Man ordne den gegebenen Ausdruck nach Potenzen eines beliebigen Buchstaben; dadurch wird das erste Glied desselben das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel;

2) zieht man nun aus dem ersten Gliede des geordneten Ausdruckes die Quadratwurzel aus; so ist diese (nämlich a) das erste Glied der zu suchenden Wurzel.

3) Subtrahirt man das Quadrat der gefundenen Wurzel vom Radikand, so bleibt noch $2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 \ldots$ als Rest, dessen erstes Glied $2ab$ das doppelte Produkt des ersten und zweiten Wurzelgliedes ist. Dividirt man daher

4) durch das doppelte der gefundenen Wurzel ($2a$) das erste Glied des Restes ($2ab$), so ist der Quotient (b) das zweite Glied der Wurzel. — Mit diesem bilde man die beiden Bestandtheile, welche das zweite Wurzelglied im Quadrate gibt, und subtrahire deren Summe, nämlich $2ab + b^2$, vom Radikand.

5) Den Rest $2(a + b)c + c^2 \ldots$ dividire man wieder durch das doppelte der bisher gefundenen Wurzeltheile, nämlich $2(a + b)$, und fahre auf ähnliche Weise fort, bis die Wurzel vollständig gefunden ist.

6) Der gefundenen Wurzel setze man das Zeichen $\pm$ vor (§. 171, I.). — Die Operation selbst werden ein paar Beispiele hinreichend klar machen.

Es sei $\sqrt{(49a^6b^4 + 16a^2b^6 - 56a^4b^5)}$ zu bestimmen, so erhalten wir, wenn der Radikand geordnet wird:

$$\sqrt{49a^6b^4 - 56a^4b^5 + 16a^2b^6} = \pm(7a^3b^2 - 4ab^3)$$
$$-\,49a^6b^4 \qquad (14a^3b^2)$$
$$〃 \quad \mp 56a^4b^5 \pm 16a^2b^6$$
$$〃 \quad 〃$$

Als Beispiel einer mehr als zweigliederigen Quadratwurzel habe man folgendes, in welchem der Radikand bereits geordnet ist:

$$\sqrt{(64a^6 - 80a^4 + 73a^2 - 46 + 19a^{-2} - 6a^{-4} + a^{-6})}$$
$$-\,64a^6 \quad (16a^3) \qquad = \pm(8a^3 - 5a + 3a^{-1} - a^{-3})$$
$$〃 \quad \mp 80a^4 \pm 25a^2$$
$$〃 \quad + 48a^2 - 46 + 19a^{-2}$$
$$(16a^3 - 10a)$$
$$\pm 48a^2 \mp 30 \pm 9a^{-2}$$
$$〃 \quad - 16 + 10a^{-2} - 6a^{-4} + a^{-6}$$
$$(16a^3 - 10a + 6a^{-1})$$
$$\mp 16 \pm 10a^{-2} \mp 6a^{-4} \pm a^{-6}$$
$$〃 \quad 〃 \quad 〃 \quad 〃$$

Wie aus dem vorstehenden Beispiele ersichtlich, ist es nicht nöthig, zum jedesmaligen Reste alle Glieder des Radikands herabzusetzen, sondern nur so viele, daß der neue Dividend ein Glied mehr hat, als die bereits gefundene Wurzel.

II. Ist der gegebene Radikand kein vollkommenes Quadrat, so ist die Wurzel irrational; es lassen sich jedoch durch das oben angegebene Verfahren beliebig viele Glieder von der sich dabei ergebenden unendlichen Reihe darstellen. So erhält man z. B.

$$\sqrt{1 - 2a + 3a^2} = \pm \left(1 - a + a^2 + a^3 + \frac{a^4}{2} - \frac{a^5}{2} \ldots\right)$$

$$\begin{array}{l}
-1 \quad (2) \\
\text{〃} \mp 2a \pm a^2 \\
\quad \text{〃} + 2a^2 \\
\qquad (2 - 2a) \\
\qquad \pm 2a^2 \mp 2a^3 \pm a^4 \\
\qquad \text{〃} + 2a^3 - a^4 \\
\qquad\quad (2 - 2a + 2a^2) \\
\qquad\quad \pm 2a^3 \mp 2a^4 \pm 2a^5 \pm a^6 \\
\qquad\quad \text{〃} + a^4 - 2a^5 - a^6 \\
\qquad\qquad (2 - 2a + 2a^2 + 2a^3) \\
\qquad\qquad \pm a^4 \mp a^5 \pm a^6 \pm a^7 \pm \frac{a^8}{4} \\
\qquad\qquad \text{〃} - a^5 - 2a^6 - a^7 - \frac{a^8}{4}
\end{array}$$

u. s. f.

§. 174.

Aufg. Aus einer dekadischen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl. u. Bew. Der Radikand mag ein Quadrat sein oder nicht, die Wurzel also rational oder irrational werden, so bleibt die Operation dieselbe; man verfährt nämlich auch hier nach der allgemeinen Formel $(a+b+c\ldots)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2\ldots$, und zwar auf folgende Weise:

I. wenn der Radikand ein vollkommenes Quadrat, und zwar

a) eine ganze Zahl ist, so theile man

1) die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu je zwei Ziffern, wobei die letzte auch nur eine Ziffer erhalten kann; so ist dadurch die Ziffernanzahl der Wurzel bestimmt (§. 144, Zus. 2.).

2) Ziehe aus der höchsten Klasse die möglichst größte Wurzel (welche aus §. 141, 2. bekannt ist) aus, mache sie zur ersten Ziffer der zu suchenden Wurzel, und subtrahire ihr Quadrat von der höchsten Klasse.

3) Zum Reste (der auch 0 sein kann) setze man die nächste Klasse aus dem Radikand herab, betrachte die dadurch entstehende Zahl mit Ausnahme ihrer letzten Ziffer (rechts, die man durch ein Komma abtrennen kann) als Dividend, und schreibe neben dieselbe das Doppelte der bereits gefundenen Wurzel als Divisor. Dividirt man mit diesem Doppelten in jenen Dividend, so ist der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel.

4) Diese erhaltene zweite Wurzelziffer setze man auch (rechts) zum Divisor, und multiplizire damit die aus dem Divisor und der zugesetzten Wurzelziffer bestehende Zahl, wodurch man die beiden Bestandtheile, welche eine zweite Wurzelziffer im Quadrate gibt, nämlich $2ab + b^2 = (2a + b)\,b$, erhält, und subtrahire das Produkt vom ganzen Dividend (mit Einschluß der letzten Ziffer rechts).

5) Erhält die Wurzel mehr als zwei Ziffern, so setze man zum jedesmal sich ergebenden Reste die nächste Klasse herab, betrachte alle bisher gefundenen Stellen der Wurzel als eine Zahl (ersten Theil), schreibe deren Doppeltes als Divisor so neben die durch die jedesmal herabgesetzte Klasse entstandene Zahl, wie Nr. 3 angegeben ist, und verfahre nach Nr. 4. Diese Operation wird so lange fortgesetzt, bis alle Klassen herabgeschrieben sind, und am Ende kein Rest mehr bleibt.

6) Ist irgend einmal der Dividend kleiner, als der Divisor (dieser also nicht in jenem enthalten), so wird in der Wurzel eine Nulle gesetzt, die nächste Klasse herabgeschrieben, der Divisor neuerdings aus der ganzen bereits gefundenen Wurzel bestimmt, und mit der Operation wie oben fortgefahren.

7) Hat der Radikand rechts Nullen, so gibt jedes Paar derselben eine Nulle in der Wurzel (§. 141, Zus. 2.). — Z. B.

1) $\sqrt{57|76} = \pm \overset{ab}{76}.$

$-49 \;.\;.\;. = a^2 \;.\;.\;.\;.\;. = 7^2$

$876 : 14{,}6$

$-876 \;.\;. = (2a+b)b \;.\;. = (2.70+6).6.$

″

Die Wurzel ist hier zweizifferig, also hat die erste Wurzelziffer (7) den Werth 70, es müßte also eigentlich der Rest 876 durch $2.70 = 140$ dividirt werden. Man läßt jedoch die Nulle weg, wodurch das Verfahren vereinfacht und der Lokalwerth dennoch berücksichtigt wird.

2) $\sqrt{12|31|09|75|69} = \pm 35087.$

-9

$331 : 6{,}5$

-325

$.609 : 70$

$60975 : 700{,}8$

-56064

$491169 : 7016{,}7$

-491169

″

b) Ist der gegebene Radikand ein **Dezimalbruch**, so muß er die Form $a.10^{-2n}$ haben, d. h. die Anzahl der Dezimalen muß gerade sein (§. 145, Zus.); woraus $\sqrt{a.10^{-2n}} = 10^{-n}\sqrt{a}$ folgt. Man erhält also die Quadratwurzel aus einem Dezimalbruche, wenn man ihn wie eine ganze Zahl radizirt, und vom Resultate halb soviele Dezimalstellen abschneidet, als der Radikand enthält. Z. B. mit einiger Abkürzung der Operation (indem man das jedesmalige Produkt $(2a+b)b$, z. B. 43.3, 467.7 u. s. f. nicht anschreibt, sondern mit Anwendung der dekadischen Ergänzungen unmittelbar abzieht), ergibt sich:

1) $\sqrt{5|64{\cdot}06|25} = \pm 23{\cdot}75 = \frac{\sqrt{5640625}}{100}.$

$164 : 4{,}3$

$3506 : 46{,}7$

$23725 : 474{,}5$

″

Ebenso findet man 2) $\sqrt{5 \cdot 640625} = \pm\ 2 \cdot 375$, und

3) $\sqrt{0 \cdot 0005640625} = \pm\ 0 \cdot 02375$.

II. Ist der gegebene Radikand keine Quadratzahl, so ist die Wurzel irrational, läßt sich jedoch annähernd so genau bestimmen, als man will, und zwar auf demselben Wege wie vorhin. Ist nämlich derselbe

a) eine ganze Zahl, so suche man aus ihr die Wurzel ganz nach Nr. I. a), mache, wenn alle Klassen des Radikands in Rechnung gekommen, in der Wurzel das Dezimalzeichen, hänge dem jedesmaligen Reste zwei Nullen an, und setze die Operation beliebig weit fort. Denn man kann sich der Zahl eine beliebige Anzahl von Nullenpaaren als Dezimalen angehängt denken, wodurch die Operation auf Nr. I. b) zurückgeführt ist. Z. B.

$$\sqrt{87|64} = \pm\ 93{\cdot}616 \ldots = \sqrt{8764{\cdot}000000 \ldots}$$

```
 664 : 18,3
 11500 : 186,6
   30400 : 1872,1
   1167900 : 18722,6
     44544 . . . . . Rest.
```

b) Ist der Radikand ein Dezimalbruch, so theile man ihn vom Dezimalzeichen ausgehend in Klassen, die Ganzen gegen die Linke, die Dezimalen gegen die Rechte, mache die Anzahl der letztern, wenn sie ungerade sein sollte, durch Anhängen einer Nulle gerade (§. 145, Zus.), und verfahre wie oben. Man findet z. B.

$$\sqrt{115 \cdot 375} = \sqrt{1|15 \cdot 37|50} = \pm\ 10 \cdot 74127 \ldots$$

c) Soll aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel ausgezogen werden, so kann man

α) wenn Zähler und Nenner oder nur der Nenner ein vollkommenes Quadrat ist, nach §. 159. verfahren; denn es ist

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \quad \text{Z. B.}$$

$$\sqrt{\frac{144}{49}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{49}} = \pm\ \frac{12}{7}\,; \quad \sqrt{7\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \pm\ \frac{8}{3}.$$

Ebenso ist

$$\sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{15} = \pm \frac{3\cdot 8729833}{2} = \pm 1\cdot 9364916 \; \ldots\ldots$$

Bisweilen muß man den Bruch zuerst abkürzen; z. B.

$$\sqrt{\frac{125}{405}} = \sqrt{\frac{25}{81}} = \pm \frac{5}{9}.$$

β) Ist der Nenner des Bruches kein Quadrat, so kann man den Bruch (nach §. 165, Zus. 3.) in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Quadrat ist, und nach α) verfahren, oder (was für die Ausübung meistens zweckmäßiger ist) man verwandelt ihn in einen Dezimalbruch, und radizirt diesen. Z. B.

$$\sqrt{\frac{24}{17}} = \sqrt{\frac{24\,.\,17}{17\,.\,17}} = \frac{\sqrt{408}}{17} = \pm \frac{20\cdot 199\ldots}{17} = \pm 1\cdot 188\ldots$$

$$= \sqrt{1\cdot 411764\ldots} = \pm 1\cdot 188\ \ldots$$

Anm. 1. Es versteht sich von selbst, daß bei dem Ausziehen der Quadratwurzel aus einem unendlichen Dezimalbruche dem gebliebenen Reste keine Nullen, sondern die folgenden Dezimalstellen anzuhängen sind. Dasselbe ist der Fall bei der Radizirung einer irrationalen Zahl.

In beiden Fällen läßt sich übrigens (mittelst §. 118.) eine Abkürzung anwenden, durch die man noch ebenso viele neue Stellen der Wurzel richtig finden kann, als sich durch Radizirung ergeben haben.

Das Verfahren ist Folgendes: Man radizirt, bis alle Klassen des Radikands in Rechnung gekommen, auf die gewöhnliche Art, hängt dem übrig bleibenden Reste keine Nullen an, sondern theilt ihn durch den letzten (aus dem Doppelten der zuletzt gefundenen Wurzelziffer korrigirten) Divisor auf abgekürzte Weise (nach §. 118.); die Quotienten sind die folgenden Stellen der Wurzel. Z. B.

$$\sqrt{3\cdot 14|15|92|65} = \pm 1\cdot 77245385\ \ldots$$

$$\begin{array}{l}
214 : 2{,}7 \\
\;\;2515 : 34{,}7 \\
\;\;\;\;8692 : 354{,}2 \\
\;\;\;\;160865 : 3544{,}4 \\
\;\;\;\;\;\;19089 : 3545 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;1364 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;300 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;17 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;''
\end{array}$$

Wäre der Radikand 3·141592653, also die Anzahl seiner Dezimalen ungerade, so kann man zum letzten Reste (19089) die noch übrige Dezimale (3) herabsetzen, dann ist aber als Divisor das Doppelte der ganzen bereits gefundenen Wurzel zu nehmen. Sonach hätte man also für die Auffindung der weitern Wurzelziffern 190893 : 35448.

Anm. 2. Will man bei irrationalen Wurzeln die Probe machen, so muß zum Quadrate der gefundenen Wurzel der zuletzt gebliebene Rest addirt werden, d. h. für den Radikand p, die Wurzel w und den Rest r, ist stets $p = w^2 + r$.

So fand man z. B. oben II. a) $\sqrt{8764} = 93{\cdot}616 \ldots$, wobei 44544 als Rest blieb. Es ist aber

$$\begin{array}{rl} 93{\cdot}616^2 = 8763{\cdot}955456; & \text{dazu den Rest} \\ 44544 & \text{addirt, gibt} \\ \hline 8764{\cdot}000000 = 8764. & \end{array}$$

§. 175.

Aufg. Aus einer komplexen algebraischen Größe die Kubikwurzel auszuziehen.

Aufl. Der gegebene Ausdruck ist entweder ein vollkommener Kubus oder nicht. In beiden Fällen verfährt man mit Rücksicht auf die (§. 147. entwickelte) Formel:

$$(a + b + c \ldots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 \ldots\ldots$$

I. Der Radikand sei ein vollkommener Kubus, so verfahre man nach folgenden Regeln:

1) Man ordne ihn nach Potenzen eines beliebigen Buchstaben; ziehe dann

2) aus dem ersten Gliede (a^3) die Kubikwurzel aus, so gibt diese das erste Glied der zu suchenden Wurzel, welches wieder kubirt und vom Radikand subtrahirt wird.

3) Das erste Glied des Restes (nämlich $3a^2b$) dividire man durch das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Wurzelgliedes ($3a^2$); so ist der Quotient (b) das zweite Glied der Wurzel. Mit diesem bilde man

4) die drei Bestandtheile, welche jedes Glied der Wurzel (mit Ausnahme des ersten) im Kubus gibt (§. 147.), und subtrahire die Summe derselben vom Radikand.

5) Den Rest $3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \ldots$ dividire man wieder durch $3(a+b)^2$, so ist der Quotient (c) das dritte Glied der Wurzel, mit welchem wieder nach Nr. 4. verfahren wird.

6) Hätte die Wurzel mehr als drei Glieder, so wird auf die nämliche Weise fortgefahren, indem man immer die Summe aller bereits gefundenen Glieder als ersten Theil der Wurzel betrachtet.

Z. B. man bestimme

$$\sqrt[3]{\left(98a^nb^4 - \frac{28a^{2n}b^2}{3} + \frac{8a^{3n}}{27} - 343b^6\right)}.$$

Wird der Radikand geordnet, so erhält man:

$$\sqrt[3]{\frac{8a^{3n}}{27} - \frac{28a^{2n}b^2}{3} + 98a^nb^4 - 343b^6} = \frac{2a^n}{3} - 7b^2$$

$$-\frac{8a^{3n}}{27} \quad \left(\frac{4a^{2n}}{3}\right)$$

$$'' \quad \mp \frac{28a^{2n}b^2}{3} \pm 98a^nb^4 \mp 343b^6$$

$$'' \quad '' \quad ''$$

Auf die angegebene Weise findet man ebenso:

$$\sqrt[3]{27a^6 - 54a^5 + 63a^4 - 44a^3 + 21a^2 - 6a + 1} = 3a^2 - 2a + 1.$$

$$-27a^6 \quad (27a^4)$$

$$'' \quad \mp 54a^5 \pm 36a^4 \mp 8a^3$$

$$'' \quad + 27a^4 - 36a^3 + 21a^2 - 6a + 1$$

$$(27a^4 - 36a^3 + 12a^2)$$

$$\pm 27a^4 \mp 36a^3 \pm \begin{cases} 12a^2 \\ 9a^2 \end{cases} \mp 6a \pm 1$$

$$'' \quad '' \quad '' \quad '' \quad ''$$

II. Ist der Radikand kein vollkommener Kubus, so läßt sich durch das nämliche Verfahren die Kubikwurzel näherungsweise bestimmen. Z. B.

$$\sqrt[3]{a^3 - m} = a - \frac{m}{3a^2} - \frac{m^2}{9a^5} - \frac{5m^3}{81a^8} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{-a^3}{} \quad (3a^2)$$

$$'' \quad \mp m \pm \frac{m^2}{3a^3} \mp \frac{m^3}{27a^6}$$

$$'' \quad -\frac{m^2}{3a^3} + \frac{m^3}{27a^6}$$

$$\left(3a^2 - \frac{2m}{a} + \frac{m^2}{3a^4}\right)$$

$$\mp \frac{m^2}{3a^3} \pm \frac{2m^3}{9a^6} \mp \frac{m^5}{81a^{12}} \mp \frac{m^6}{729a^{15}}$$

$$'' \quad -\frac{5m^3}{27a^6} + \frac{m^5}{81a^{12}} + \frac{m^6}{729a^{15}}$$

$$\left(3a^2 - \frac{2m}{a} - \frac{m^2}{3a^4} + \frac{2m^3}{9a^7} + \frac{m^4}{27a^{10}}\right)$$

u. s. w.

§. 176.

Aufg. Die Kubikwurzel aus einer dekadischen Zahl auszuziehen.

Aufl. I. Ist die gegebene Zahl eine Kubikzahl, und zwar

a) eine *ganze Zahl*, so theile man dieselbe, sie mag aus so vielen Ziffern bestehen, als sie will,

1) von der Rechten gegen die Linke in Klassen zu je drei Ziffern, so ist dadurch die Anzahl der Ziffern der Wurzel bestimmt (§. 148. Zuss.).

2) Dann ziehe man aus der ersten Klasse (links) die möglichst größte Kubikwurzel (welche aus §. 141, 2. bekannt ist) aus; so ist diese die erste Ziffer der verlangten Wurzel.

3) Man subtrahire den Kubus dieser Wurzel von der höchsten Klasse, und schreibe zum allenfallsigen Reste die nächste Klasse.

4) Neben die hiedurch entstehende Zahl, welche wir R heißen wollen, setze man das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzelziffer als Divisor, betrachte die Zahl R mit Ausnahme ihrer zwei letzten (rechts stehenden) Ziffern, die man durch ein

Komma abtrennen kann, als Dividend, und theile ihn durch den Divisor, so ist der Quotient die zweite Ziffer der Wurzel.

5) Mit dieser zweiten Wurzelziffer bilde man die drei Bestandtheile, welche sie bei der Kubirung (§. 147.) geben müßte, setze diese Bestandtheile so unter den Dividend, daß die Endziffer des ersten unter die letzte Ziffer desselben kommt, die Endziffer eines jeden der folgenden aber eine Stelle weiter gegen die Rechte hinausrückt, und subtrahire ihre Summe von der Zahl R.

6) Zum Reste schreibe man die nächste Klasse herab, betrachte die bereits gefundene Wurzel als eine Zahl, bilde ihr dreifaches Quadrat, und verfahre damit nach Nr. 4; der Quotient ist die dritte Wurzelziffer, welche wieder auf die Nr. 5 angegebene Weise behandelt wird.

7) Nun betrachte man die drei gefundenen Stellen als ersten Theil der Wurzel, und suche wie vorhin die vierte Ziffer u. s. w. Diese Operation wird so lange wiederholt, bis aus dem Radikand alle Klassen herabgesetzt sind, und zuletzt kein Rest übrig bleibt.

8) Wäre einmal der Dividend kleiner als der Divisor, so wird in der Wurzel eine Nulle angesetzt, und eine neue Klasse herabgeschrieben.

9) Hat der Radikand rechts angehängte Nullen, so geben je drei derselben eine Nulle in der Wurzel (§. 141. Zus.).

Man sieht, daß auch hier mit steter Rücksicht auf die §. 147. angegebene Formel verfahren wird. — Folgende vollständig ausgeführte Beispiele werden das Verfahren hinreichend klar machen.

			Ausführlich:
1) $\sqrt[3]{405\vert 224} = \overset{a\,b}{74}$			$\sqrt[3]{405\vert 224} = 70 + 4 = 74.$
-343	. . . . . .	$= a^3$ . . .	-343000
$622,24 : 147$		$= R : 3a^2$	$62224 : 14700$
588	. . . .	$= 3a^2b$ . . .	58800
336	. . . .	$= 3ab^2$ . . .	3360
64	. . . .	$= b^3$	64
-62224	.	$= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ . .	-62224
″			″

In dem folgenden Beispiele ist die Operation dadurch in etwas abgekürzt, daß mittelst der dekadischen Ergänzungen die Subtraktionen sogleich vollzogen sind.

$$2)\ \sqrt[3]{17|173|512} = \overset{a\,b\,c}{258}.$$

$$\begin{array}{l}
9173 : 12\ (3.2^2) = R : 3a^2 \\
-\begin{cases} 60 \ldots\ldots\ldots = 3.2^2.5 = 3a^2b \\ 150 \ldots\ldots\ldots = 3.2.5^2 = 3ab^2 \\ 125 \ldots\ldots\ldots = 5^3 \quad = b^3 \end{cases} \\
\hline
1548512 : 1875\ (3.25^2) = R' : 3(a+b)^2 \\
-\begin{cases} 15000 \ldots\ldots\ldots = 3.25^2.8 = 3(a+b)^2c \\ 4800 \ldots\ldots\ldots = 3.25.8^2 = 3(a+b)c^2 \\ 512 \ldots\ldots\ldots = 8^3 \quad = c^3. \end{cases} \\
\hline
\quad ''
\end{array}$$

In den nachfolgenden Beispielen ist der zweite und dritte Bestandtheil, den jede Wurzelziffer beim Kubiren gibt, mit Rücksicht auf die Gleichung $3ab^2 + b^3 = (3a + b)b^2$, zusammen angegeben.

$$3)\ \sqrt[3]{65|792|478|653|000|000} = 403700.$$

$$\begin{array}{l}
1792 : 48 \\
1792478 : 4800 \\
14400 \\
\quad 10827 \\
\hline
341651653 : 487227 \\
3410589 \\
\quad 592753 \\
\hline
\quad ''
\end{array}$$

b) Ist der Radikand ein **Dezimalbruch**, so bleibt die Operation ganz dieselbe; man radizirt ihn nämlich ohne Rücksicht auf das Dezimalzeichen, wie eine ganze Zahl, und schneidet vom Resultate so viele Stellen ab, als die Dezimalen des Radikands Klassen bilden oder setzt in der Wurzel, wenn alle Klassen der Ganzen herabgeschrieben sind, das Dezimalzeichen, und fährt dann ohne weitere Rücksicht auf dasselbe in der Operation fort. Z. B.

$$\sqrt[3]{0{\cdot}000|155|373|797|376} = 0{\cdot}05376.$$

```
30373 : 75
225
 1377
 6496797 : 8427
 58989
   78253
   519644376 : 865107
   5190642
      580176
```

II. Ist der gegebene Radikand kein vollkommener Kubus, jedoch a) eine ganze Zahl, so verfahre man, bis alle Klassen des Radikands herabgesetzt sind, wie oben, mache dann in der Wurzel das Dezimalzeichen, hänge dem Reste eine Klasse (also 3) Nullen an, und suche die nächste Wurzelziffer wie vorhin. Zum Reste schreibe man wieder eine Klasse von Nullen, und setze die Operation wie vorhin fort, bis man soviele Dezimalstellen gefunden hat, als die Genauigkeit des Resultates verlangt.

Dasselbe Resultat wird erzielt, wenn man dem Radikand gleich anfangs soviele Klassen von Nullen als Dezimalen anhängt, als man in der Wurzel Dezimalstellen erhalten will. Z. B.

$$\sqrt[3]{36} = 3{\cdot}30192\ldots = \sqrt[3]{36{\cdot}000|000\ldots}$$

```
9000 : 27
81
 837
 63000000 : 326700
 326700
     9901
 30320099000 : 32689803
 294208227
     8022159
     891254141000 : 3270763083
     6541526166
          3962288
     237097562112 . . . u. s. w.
```

b) Ist der Radikand ein Dezimalbruch, und es lassen sich die Dezimalen vom Dezimalzeichen aus nicht in Klassen zu je drei Ziffern eintheilen, so müssen die fehlenden Stellen der letzten Klasse durch Nullen ergänzt werden (§. 149, Zus.). Demnach erhält man z. B.

$$\sqrt[3]{4375 \cdot 5} = \sqrt[3]{4|375 \cdot|500|} = 16 \cdot 3559\ .\ .\ ;\ \text{ebenso}$$

$$\sqrt[3]{0 \cdot 0008} = \sqrt[3]{0 \cdot|000|800|} = 0 \cdot 09283\ .\ .\ .,$$

c) Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner irrational ist, kann entweder in einen andern mit rationalem Nenner verwandelt werden (§. 165, Zus. 3.), oder man kann ihn, was oft bequemer und zweckmäßiger ist, in einen Dezimalbruch verwandeln, und diesen radiziren. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{11}{13}} = \sqrt[3]{\frac{11 . 13^2}{13^3}} = \frac{\sqrt[3]{1859}}{13} = \frac{12 \cdot 2959}{13} \ldots = 0 \cdot 9458 \ldots$$

$$= \sqrt[3]{0 \cdot 846|153|846| \ldots} = 0 \cdot 9458 \ldots.$$

Anm. 1. Soll über die Richtigkeit der Rechnung die Probe gemacht werden, so muß, wenn q den Radikand, w die gefundene Wurzel, und r den zuletzt gebliebenen Rest bezeichnet, stets $q = w^3 + r$ sein.

Anm. 2. Nach den bisher erklärten Gesetzen läßt sich nun jede Wurzel aus einer Zahl bestimmen, wenn der Radikator eine Potenz von 2 oder 3, oder ein Vielfaches von 2 und 3 ist; denn es ist (nach §. 161, Zus. 1.):

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}};\ \sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}},\ (\text{nicht } \sqrt{\sqrt[3]{a}},\ \text{warum?});\ \sqrt[8]{a} = \sqrt[4]{\sqrt{a}};$$

$$\sqrt[9]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}};\ \sqrt[12]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}\ \text{u. s. f.}$$

Enthält der Exponent eine der Primzahlen 5, 7, 11 . . . ., so könnte man nach eigenen Formeln verfahren, jedoch ist das Verfahren zu weitläufig und schwierig. Ein viel einfacheres enthält das folgende Kapitel und §. 350.

III. Kap. Vom Logarithmiren.

§. 177.

Erkl. 1. Logarithmiren oder auch Exponenziren (im weitern Sinne) heißt zu einem gegebenen Dignand und einer

gegebenen Potenz den zugehörigen Exponenten finden, oder jenen Exponenten bestimmen, mit dem der gegebene Dignand potenzirt werden muß, um die gleichfalls gegebene Potenz zu erhalten.

Der gegebene Dignand wird hier Basis oder Grundzahl, die gegebene Potenz Logarithmand oder Numerus, und der zu bestimmende Exponent der Logarithmus genannt.

2. Man bezeichnet einen Logarithmus dadurch, daß man dem Logarithmand die Silbe log, oder auch nur lg voransetzt, und darüber die Basis schreibt, und es ist der allgemeine Ausdruck eines Logarithmus, wenn a einen beliebigen Logarithmand, g die Grundzahl bezeichnet: $\overset{g}{\lg}\, a$ (gelesen: Logarithmus [von] a für die Basis g). Kommen (was gewöhnlich der Fall ist) nur Logarithmen für ein und dieselbe Basis vor, so wird diese weggelassen; man schreibt also dann nur log a oder lg a.

3. Die Zahl, welche zu einem gegebenen oder durch Rechnung gefundenen Logarithmus gehört, wird dadurch angedeutet, daß man letzterm das Zeichen Nlog oder Nlg (gelesen: Numerus logarithmi) voransetzt. Ist z. B. $\lg a = \lambda$, so ist $a = \text{Nlg}\,\lambda$.

Zus. Wenn man a) die Basis mit dem Logarithmus potenzirt, so erhält man den Logarithmand, b) den Logarithmand durch den Logarithmus radizirt, so erhält man die Basis. Denn ist z. B. $\overset{g}{\lg}\, a = \lambda$, so ist $a = g^{\lambda} = g^{\lg a}$, und umgekehrt $g = \sqrt[\lambda]{a} = \sqrt[\lg a]{a}$.

A. Von den Logarithmen überhaupt.

§. 178.

Erkl. 1. Man kann sich alle möglichen Zahlen aus einer einzigen Zahl dadurch entstanden denken, daß man diese mit verschiedenen Exponenten potenzirt. Denn bezeichnet g eine unveränderliche (constante) Zahl, und man setzt $g^x = y$, so ist einleuchtend, daß der Werth von y so oft ein anderer wird, als man der veränderlichen (variablen) Zahl x einen andern bestimmten (positiven oder negativen) Werth gibt, daß also auch nach und nach y die Werthe aller möglichen Zahlen erhalten, und somit

die Gleichung $g^x = y$ als allgemeine Form für alle möglichen Zahlen gelten kann.

2. Den Inbegriff aller Logarithmen, welche zu einerlei Basis gehören, oder die Logarithmen aller Zahlen für ein und dieselbe Basis nennt man ein Logarithmensystem.

3. Die Basis eines Logarithmensystems ist willkührlich; nur muß sie so beschaffen sein, daß sie mit verschiedenen Exponenten potenzirt alle möglichen Zahlen hervorbringt. Es kann daher weder 1 (§. 43. Zus. 1.), noch eine negative Zahl Basis eines Logarithmensystems sein.

Zus. 1. Da jede positive Zahl Basis sein kann, so gibt es unzählige Logarithmensysteme.

Zus. 2. Die Logarithmen negativer Zahlen sind bei positiver Basis unmöglich, weil keine Potenz einer positiven Zahl negativ werden kann.

Zus. 3. In jedem Systeme ist der Logarithmus der Basis gleich 1, der Logarithmus der Einheit gleich 0; d. h. es ist stets $\lg g = 1$ und $\lg 1 = 0$. Denn es sei g was immer für eine Basis, so ist stets

$$g^1 = g, \text{ also } \lg g = 1, \text{ und } g^0 = 1, \text{ folglich } \lg 1 = 0.$$

§. 179.

Lehrs. In jedem Systeme, dessen Basis größer ist, als 1, gehört I. zu jedem positiven Logarithmus eine (positive) Zahl, die größer ist, als 1, und zwar um so größer, je größer der Logarithmus ist, II. zu jedem negativen Logarithmus eine (positive) Zahl, die kleiner ist als 1, und zwar um so kleiner, je größer der Logarithmus ist.

Dat. $g > 1$.

Bew. Wegen $g > 1$ ist auch $g^x > 1$ und $g^{-x} < 1$ (§. 135.), und zwar wird g^x um so größer, dagegen g^{-x} um so kleiner werden, je größer der Werth von x genommen wird (§. 135, Zus. 2. und §. 137, Zus. 3.).

Zus. Ist also eines Systemes Basis $g > 1$, so sind die Logarithmen aller Zahlen, welche größer als 1 sind, positiv, die Logarithmen echter Brüche aber sind negativ.

§. 180.

Lehrs. In demselben Systeme gehören I. zu gleichen Zahlen auch gleiche, II. zu ungleichen Zahlen ungleiche Logarithmen.

I. Dat. $a = b$. — Thes. $\lg a = \lg b$.

Bew. Setzt man $a = g^x$, so ist auch $b = g^x$, woraus $\lg a = x$ ebenso $\lg b = x$, mithin auch $\lg a = \lg b$ folgt.

II. Dat. $a > b$. — Thes. $\lg a > \lg b$.

Bew. Setzt man $a = g^x$ und $b = g^y$, so ist $g^x > g^y$, und daher $x > y$; ferner ist $\lg a = x$ und $\lg b = y$, woraus man durch Substitution $\lg a > \lg b$ erhält.

Zus. 1. Umgekehrt gehören zu gleichen Logarithmen auch gleiche, zu ungleichen Logarithmen ungleiche Zahlen. Ebendeßhalb gehört zu jeder Zahl auch nur ein Logarithmus, und zu jedem Logarithmus nur eine Zahl.

Zus. 2. Der Logarithmus einer Zahl ist selbst wieder eine Zahl, daher läßt sich auch von dieser wieder der Logarithmus nehmen. Ist z. B. $m = \lg a$, so ist auch $\lg m = \lg(\lg a) = \lg\lg a$. Auf die nämliche Art, wenn $n = \lg m = \lg\lg a$, ist auch $\lg n = \lg\lg m = \lg\lg\lg a$ u. s. w.

§. 181.

Lehrs. Der Logarithmus eines Produktes ist (bei der nämlichen Basis) gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

Thes. $\lg abc \ldots = \log a + \log b + \lg c \ldots$

Bew. Es bezeichne g die Basis eines Systemes, und es sei $a = g^m$, $b = g^n$ und $c = g^p$ rc., so ist $abc \ldots = g^{m+n+p} \ldots$ (§. 45.); also $\lg abc \ldots = m + n + p + \ldots$

Wegen $a = g^m$ ist aber auch $m = \lg a$, aus demselben Grunde $n = \lg b$ und $p = \lg c$ rc.; daher durch Substitution

$$\lg abc \ldots = \lg a + \lg b + \lg c + \ldots$$

Zus. 1. Man erhält (umgekehrt) die Summe mehrerer Logarithmen, wenn man das Produkt der Logarithmanden logarithmirt.

Zus. 2. In jedem Systeme ist es nur nöthig die Logarithmen der Primzahlen zu bestimmen, die aller übrigen ergeben sich dann durch eine bloße Addition. Z. B.

$$\lg 30 = \lg(2.3.5) = \lg 2 + \lg 3 + \lg 5.$$

§. 182.

Lehrs. Man erhält den Logarithmus eines Quotienten (Bruches), wenn man den Logarithmus des Divisors (Nenners) von dem des Dividends (Zählers) subtrahirt.

Thes. $\lg(a:b) = \lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$.

Bew. Es sei wieder $a = g^m$ und $b = g^n$, so ist $a:b = g^{m-n}$, folglich $\lg(a:b) = m - n$. Wegen $a = g^m$ ist aber $m = \lg a$, und ebenso $n = \lg b$; mithin durch Substitution

$$\lg(a:b) = \lg a - \lg b.$$

Zus. 1. Die Differenz zweier Logarithmen wird (umgekehrt) erhalten, wenn man den Quotus der Logarithmanden logarithmirt.

Zus. 2. Der Logarithmus eines Bruches mit dem Zähler 1 ist dem negativen Logarithmus des Nenners gleich, und umgekehrt gehört ein negativer Logarithmus einem Bruche an, dessen Zähler 1, dessen Nenner der Logarithmand ist. Denn

$$\lg\frac{1}{a} = \lg 1 - \lg a = 0 - \lg a = -\lg a.$$

§. 183.

Lehrs. Man erhält den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Logarithmus des Dignands mit dem Exponenten multiplizirt.

Thes. $\lg a^n = n . \lg a$.

Bew. Setzt man $a = g^m$, so ist $m = \lg a$. Ferner ist $a^n = g^{mn}$ (§. 139.), folglich $\lg a^n = mn$, oder statt m seinen Werth gesetzt $\lg a^n = n . \lg a$.

Ebenso ist $\lg a^{-n} = \lg\frac{1}{a^n} = \lg 1 - \lg a^n = 0 - n\lg a = - n . \lg a$; daher der Satz für jeden Exponenten giltig.

Zus. Man erhält (umgekehrt) das Produkt aus einer Zahl und aus einem Logarithmus, wenn man den Logarithmand mit der Zahl potenzirt, und die erhaltene Potenz logarithmirt; z. B. $3 . \lg 18 = \lg 18^3 = \lg 5832$.

§. 184.

Lehrs. Der Logarithmus einer Wurzelgröße wird erhalten, wenn man den Logarithmus des Radikands durch den Radikator dividirt.

Thes. $\lg \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n} = \frac{1}{n} . \lg a$.

Bew. Es ist nach §. 169.: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, also auch

$$\lg \sqrt[n]{a} = \lg a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} . \lg a = \frac{\lg a}{n} .$$

Ueberhaupt hat man daher für jede Art von Wurzeln:

$$\lg \sqrt[n]{a^{\pm m}} = \lg a^{\pm \frac{m}{n}} = \pm \frac{m}{n} . \lg a = \pm \frac{m \lg a}{n} .$$

Zus. Man erhält (umgekehrt) den Quotienten eines Logarithmus und einer Zahl, wenn man durch letztere den Logarithmand radizirt, und die erhaltene Wurzel logarithmirt.

Anm. Durch das Rechnen mit Logarithmen verwandelt sich also die Multiplikation der Zahlen in eine Addition, die Division in eine Subtraktion, das Potenziren in eine Multiplikation, das Radiziren in eine Division ihrer Logarithmen, und hierin liegt die große Wichtigkeit des Gebrauches der Logarithmen für das praktische Rechnen.

§. 185.

Lehrs. Wenn man den Logarithmus einer Zahl durch den einer andern, beide für dieselbe Basis, dividirt; so erhält man den Logarithmus der erstern für die zweite als Grundzahl.

Thes. $\overset{g}{\lg} a : \overset{g}{\lg} \gamma = \overset{\gamma}{\lg} a$.

Bew. Setzt man $\overset{g}{\lg} a = x$, $\overset{g}{\lg} \gamma = y$ und $\overset{\gamma}{\lg} a = z$, so ist $a = g^x$, $\gamma = g^y$ und $a = \gamma^z$, und daher $g^x = \gamma^z$. Substituirt man in diese Gleichung statt γ seinen Werth, so folgt $g^x = (g^y)^z = g^{yz}$, mithin auch $x = yz$ (§. 134, Zus.). Wird die letztere Gleichung durch y dividirt, so ergibt sich $x : y = z$, d. i. $\overset{g}{\lg} a : \overset{g}{\lg} \gamma = \overset{\gamma}{\lg} a$.

Zus. Sind also die Logarithmen der Zahlen nach irgend einem Systeme bekannt, so kann man dieselben leicht für eine andere Basis bestimmen.

Anm. Den bei der Verwandlung der Logarithmen eines Systemes in die eines andern constanten (unveränderlichen) Divisor $\lg \gamma$ nennt man den Modulus des neuen Systems in Bezug auf das schon bekannte.

§. 186.

Erkl. 1. Alle Zahlen, welche zwischen zwei auf einander folgenden Potenzen der Basis, z. B. g^n und g^{n+1} liegen, haben zum Logarithmus eine Zahl, die größer als n, und kleiner als $n+1$ ist, welche also aus Ganzen und einem Bruche (gewöhnlich einem Dezimalbruche) besteht.

2. Man nennt die (positive oder negative) ganze Zahl, aus welcher der Logarithmus einer Zahl besteht, Charakteristik oder Kennziffer, den beigefügten Dezimalbruch aber Mantisse (Zugabe, Zusatz).

Zus. In jedem Systeme sind nur die Logarithmen jener Zahlen ganze Zahlen, welche vollkommene Potenzen der Basis sind.

§. 187.

Aufg. Den Logarithmus einer Zahl für irgend eine Basis zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. Ist der Logarithmus von N für die Basis g zu suchen, so setze man $N = g^x$, und suche, indem man g zu verschiedenen Potenzen erhebt, die größte in x enthaltene ganze Zahl; diese sei m. Ist nun N keine vollkommene Potenz von g, so muß N zwischen g^m und g^{m+1} liegen. Es sei daher $x = m + \frac{1}{\alpha}$, so hat man

$$N = g^{m+\frac{1}{\alpha}} = g^m \,.\, g^{\frac{1}{\alpha}} \text{ (§. 45, Zus.)},$$

also auch, wenn man beide Seiten durch g^m dividirt,

$$\frac{N}{g^m} = g^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ oder, wenn man } \frac{N}{g^m} = A \text{ setzt,}$$

$$A = g^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ also auch } A^\alpha = \left(g^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha, \text{ d. i.}$$

$$A^\alpha = g\,.$$

Man suche nun wieder die größte in α enthaltene ganze Zahl, diese sei n; setzt man daher $\alpha = n + \frac{1}{\beta}$, so wird

$$A^{n+\frac{1}{\beta}} = g, \text{ oder}$$

$$A^n \cdot A^{\frac{1}{\beta}} = g; \text{ mithin auch}$$

$$A^{\frac{1}{\beta}} = \frac{g}{A^n} = B, \text{ woraus folgt}$$

$$A = B^\beta.$$

Setzt man wieder $\beta = p + \frac{1}{\gamma}$, indem man die größte in β enthaltene ganze Zahl sucht, so wird

$$A = B^{p + \frac{1}{\gamma}} = B^p \cdot B^{\frac{1}{\gamma}}, \text{ oder}$$

$$\frac{A}{B^p} = B^{\frac{1}{\gamma}}, \text{ oder}$$

$$B = \left(\frac{A}{B^p}\right)^\gamma = C^\gamma.$$

Hieraus ergibt sich auf dieselbe Art für $\gamma = q + \frac{1}{\delta}$:

$$B = C^{q + \frac{1}{\delta}} = C^q \cdot C^{\frac{1}{\delta}}, \text{ oder}$$

$$\frac{B}{C^q} = C^{\frac{1}{\delta}}, \text{ und}$$

$$C = \left(\frac{B}{C^q}\right)^\delta = D^\delta, \text{ u. s. w.}$$

Da nun $N = g^x$, also $\lg N = x$, so erhält man durch Substitution obiger Werthe

$$\lg N = x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \ldots\ldots}}}}$$

woraus sich die Näherungswerthe nach §. 124. ergeben.

So findet man z. B. aus der Gleichung $10^x = 3$, oder $\lg 3 = x$ auf diesem Wege

$$\lg 3 = x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \ldots\ldots}}}}}}$$

Die Näherungswerthe dieses Kettenbruches sind:

$$\frac{1}{2}, \frac{10}{21}, \frac{21}{44}, \frac{52}{109}, \frac{73}{153}, \frac{928}{1945}.$$

Von diesen ist nun der letzte, nämlich $\frac{928}{1945} = 0{\cdot}47712082\ldots$, welcher noch die fünfte Stelle richtig hat; daher ist

$$10^{0\cdot47712} = 3, \text{ oder } \overset{10}{\lg} 3 = 0{\cdot}47712.$$

Anm. Viel bequemere Methoden zur Berechnung der Logarithmen lehrt die höhere Mathematik.

§. 188.

Erkl. 1. Logarithmiren (im engern Sinne) heißt von der Verbindung der Zahlen eines gegebenen Ausdruckes auf die ihrer Logarithmen übergehen, was nach den §§. 181—184. geschieht. Man erhält z. B. unmittelbar

$$\lg \sqrt[5]{\frac{3a^2}{2\sqrt{b}}} = \frac{1}{5}\left(\lg 3 + 2\lg a - \lg 2 - \frac{1}{2}\lg b\right).$$

2. Umgekehrt heißt Delogarithmiren von der Verbindung der Logarithmen auf die ihrer Zahlen zurückgehen, oder jenen Ausdruck finden, durch dessen logarithmische Darstellung ein gegebener erhalten wurde. Z. B.

$$\frac{3}{5}(2\lg c + n\lg d) - \left(\lg 7 + \frac{5\lg a}{7} + \frac{4\lg b}{7}\right)$$

$$= \frac{3}{5}(\lg c^2 + \lg d^n) - \left(\lg 7 + \lg\sqrt[7]{a^5} + \lg\sqrt[7]{b^4}\right)$$

$$= \lg\sqrt[5]{(c^2d^n)^3} - \lg 7\sqrt[7]{a^5b^4} = \lg\frac{\sqrt[5]{(c^2d^n)^3}}{7\sqrt[7]{a^5b^4}}.$$

Zus. Summen und Differenzen lassen sich als solche einer logarithmischen Behandlung nicht unterwerfen. — So ist z. B.

$$\lg 5a^3\sqrt{m^2 \pm n^2} = \lg 5 + 3\lg a + \tfrac{1}{2}\lg(m^2 \pm n^2).$$

§. 189.

Erkl. 1. Um sich beim Rechnen der Logarithmen mit Vortheil bedienen zu können, hat man alle in natürlicher Ordnung

auf einander folgenden Zahlen und ihre Logarithmen, für eine bestimmte Basis genau berechnet in ein geordnetes Verzeichniß gebracht, durch welches man in den Stand gesetzt ist, schnell und sicher a) zu einer gegebenen Zahl den Logarithmus, und b) zu einem gegebenen Logarithmus die zugehörige Zahl aufzusuchen. Solche Verzeichnisse nennt man Logarithmentafeln.

2. Soll eine Zahl auf logarithmischem Wege aus andern gefunden werden, so werden statt der letztern aus der Tafel ihre Logarithmen genommen, und mit diesen die angedeuteten Operationen ausgeführt, wobei man dann am Ende (wenn nicht die zu suchende Zahl ein Exponent ist) den Logarithmus des Resultates erhält, für den man nur noch die entsprechende Zahl aus der Tafel zu nehmen hat.

B. Von den dekadischen Logarithmen.

§. 190.

Erkl. Jenes Logarithmensystem, dessen Basis 10 ist, heißt das dekadische, und die Logarithmen selbst, welche für diese Grundzahl berechnet sind, nennt man gleichfalls dekadische, gewöhnlich aber nach ihrem Berechner brigg'sche *), oder, weil sie in der Elementarmathematik ausschließlich gebraucht werden, gemeine Logarithmen **).

Zus. Im brigg'schen Systeme ist der Logarithmus einer jeden Potenz von 10 dem Exponenten (also der Anzahl der Nullen) gleich. Denn es ist $\lg 10^{\pm n} = \pm n \lg 10 = \pm n$, weil $\lg 10 = 1$ ist (§. 177.). Ebenso ist umgekehrt $N \lg (\pm n) = 10^{\pm n}$ — d. h.?

---

*) Heinrich Briggs, Prof. der Mathematik zu Oxford, gab 1624 die Logarithmen der Zahlen von 1—20000 und von 90000—100000 heraus. Die Lücke von 20000—90000 füllte Adrian Vlacq, ein Holländer, aus.

**) Der Erfinder der Logarithmen (1599) ist ein Schotte John Neper oder Napier, Baron von Merchiston, (geb. 1550, gest. 3. Apr. 1617). Die Basis seines Systemes ist die irrationale Zahl:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \ldots. =$$

2·718281828459 ..... Die Logarithmen dieses Systemes werden nach ihm neper'sche, gewöhnlich aber natürliche oder auch hyperbolische genannt. Alle übrigen Logarithmensysteme (also auch das brigg'sche) heißen künstliche.

§. 191.

Lehrs. Im dekadischen Systeme hat der Logarithmus einer ganzen Zahl die um 1 verminderte Anzahl ihrer Zifferstellen zur Charakteristik.

Bew. Es sei die Zahl N mit n Ziffern geschrieben, so ist $N > 10^{n-1}$, also auch $\lg N > n - 1$.

Ferner ist $N < 10^n$, daher auch $\lg N < n$. Es fällt somit lg N zwischen $n - 1$ und n, hat also $n - 1$ als Charakteristik. (In Folge dieses Satzes sind in den Tafeln der briggs'schen Logarithmen gewöhnlich nur die Mantissen angegeben, die Charakteristiken aber weggelassen).

Zus. 1. Umgekehrt ist die Anzahl der ganzen Stellen einer Zahl um 1 größer, als die Kennziffer ihres Logarithmus Einheiten hat.

Zus. 2. Die Logarithmen der einzifferigen Zahlen liegen somit zwischen 0 und 1, die der Zahlen von 10—100 zwischen 1 und 2, u. s. f.

Zus. 3. Die Differenzen zwischen den Logarithmen der Zahlen müssen immer kleiner werden, je größer die Zahlen selbst sind. Denn zwischen 1 und 10 liegen weniger Zahlen, als zwischen 10 und 100, zwischen diesen beiden wieder weniger, als zwischen 100 und 1000, u. s. f.

§. 192.

Lehrs. Im dekadischen Systeme unterscheidet sich der Logarithmus einer Zahl mit rechts angehängten Nullen vom Logarithmus der nämlichen Zahl ohne jene Nullen nur durch die Kennziffer.

Bew. Jede Zahl mit rechts angehängten Nullen läßt sich darstellen unter der Form $a \, . \, 10^n$, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Es ist aber

$$\lg a \, . \, 10^n = \lg a + n \lg 10 = \lg a + n.$$

Setzt man nun $\lg a = k \cdot m$, wobei k die Kennziffer, m die Mantisse bezeichnet, so ist $\lg a \, . \, 10^n = k \cdot m + n = (k + n) \cdot m$.

Zus. Der Logarithmus einer Zahl wird nicht geändert, wenn man seine Kennziffer um eine beliebige Zahl vermehrt, und diese zugleich wieder vom Logarithmus abzieht. Denn es sei z. B. $\lg a = k \cdot m$, so ist auch $k \cdot m = k \cdot m + n - n = (k + n) \cdot m - n$.

§. 193.

Lehrs. Jeder negative Logarithmus läßt sich so verwandeln, daß seine Mantisse positiv wird, und nur die Charakteristik negativ ist.

Bew. Subtrahirt man den gegebenen Logarithmus von einer ganzen Zahl, welche um 1 größer ist, als seine Kennziffer, so wird die Differenz ein positiver reiner Dezimalbruch; setzt man dann die nämliche ganze Zahl wieder mit dem Zeichen „—" hinzu, so bleibt der gegebene Logarithmus seinem Werthe nach unverändert (§. 17, Zus. 4.) und hat die verlangte Form. Z. B. $-2·48635 = 3 - 2·48635 - 3 = 0·51365 - 3$; ebenso $-0·08527 = 0·91473 - 1$.

Diese Verwandlung wird, indem man negative Logarithmen (ausgenommen, wenn solche durch einander zu dividiren sind) zu vermeiden pflegt, in der Regel vorgenommen, und man nennt einen solchen Logarithmus, der die Form $0·m - n$ hat, einen halbpositiven oder einen Logarithmus mit negativer Kennziffer.

Anm. Für das Folgende muß man bereits im Stande sein, die Logarithmentafel gebrauchen zu können; daher mag hier der Gebrauch derselben mündlich erklärt werden.

§. 194.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmentafel den Logarithmus eines Dezimalbruches zu finden *).

Aufl. u. Bew. I. Ist der gegebene Dezimalbruch unrein, so bestimme man die Kennziffer nach der Anzahl der ganzen Stellen, und suche in der Tafel die Mantisse für die Ganzen und Dezimalen als eine Zahl. Z. B.

$$\lg 45·64 = 1·65935; \ \lg 2·389 = 0·37822.$$

*) Für alle folgenden Beispiele ist benützt: „Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, von Dr E. F. August, — Berlin, Veit u. Comp." welche sowohl ihrer typographischen Ausstattung und ihres bequemen Formates, als auch ihrer Reichhaltigkeit und Wohlfeilheit wegen für den Schulgebrauch sehr empfehlenswerth und vollkommen ausreichend sind. — Größere vorzügliche Tafeln sind von Callet, Vega, Köhler, Schrönn, Schulze, Bremiker, Hierl (die erstern siebenstellig, die beiden letztern sechsstellig), dann fünfstellige Tafeln von Lukas und Wittstein ꝛc.

Denn es ist, wenn man den Dezimalbruch als gemeinen Bruch schreibt (nach §. 182.):

$$\lg 45{\cdot}64 = \lg\frac{4564}{100} = \lg 4564 - \lg 100 = 3{\cdot}65935 - 2$$

$$= 1{\cdot}65935\ ;$$ ebenso wird

$$\lg 2{\cdot}389 = \lg\frac{2389}{1000} = 3{\cdot}37822 - 3 = 0{\cdot}37822\ .$$

II. Ist der gegebene Dezimalbruch rein, so gebe man seinem Logarithmus 0 als Charakteristik, nehme für die bedeutenden Ziffern aus der Tafel die Mantisse, und setze diesem Logarithmus so viele Einheiten als negative Kennziffer bei, als den bedeutenden Ziffern des Dezimalbruches Nullen vorangehen (die 0 Ganzen mit eingeschlossen). Z. B.

$\lg 0{\cdot}25 = 0{\cdot}39794 - 1$. Denn (wie oben) ist

$$\lg 0{\cdot}25 = \lg\frac{25}{100} = 1{\cdot}39794 - 2 = 0{\cdot}39794 - 1\ .$$

Ebenso erhält man $\lg 0{\cdot}0084 = 0{\cdot}92428 - 3$; denn

$$\lg 0{\cdot}0084 = \lg\frac{84}{10000} = \lg 84 - \lg 10000 = 1{\cdot}92428 - 4$$

$$= 0{\cdot}92428 - 3\ .$$

Zus. 1. Umgekehrt gehört also auch zu jedem Logarithmus mit negativer Kennziffer ein Dezimalbruch, dessen bedeutenden Ziffern soviele Nullen vorangehen, als die negative Kennziffer Einheiten hat. So ist z. B.

$N\lg 0{\cdot}47712 = 3$; daher $N\lg(0{\cdot}47712 - 4) = 0{\cdot}0003$.

Zus. 2. Die Logarithmen aller Zahlen, welche mit denselben Ziffern geschrieben sind, haben dieselbe Mantisse, unterscheiden sich also nur durch die Charakteristik. Z. B.

$\lg 8544 = 3{\cdot}93166$; $\lg 854{\cdot}4 = \lg 8544 - \lg 10 = 2{\cdot}93166$; $\lg 0{\cdot}8544 = \lg 8544 - \lg 10000 = 0{\cdot}93166 - 1$ u. s. w.

Zus. 3. Wird bei einem gemeinen Bruche der Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahirt (wo bei einem echten Bruche §. 192, Zus. anzuwenden ist), so erhält man den Logarithmus des Dezimalbruches, in welchen der gegebene gemeine Bruch verwandelt werden kann. Denn es ist z. B.

$\lg\frac{24}{625} = \lg 24 - \lg 625$. Nun ist aber

$$\begin{array}{l} \lg 24 = 1{\cdot}38021 = 3{\cdot}38021 - 2 \\ \underline{\lg 625 = 2{\cdot}79588 = 2{\cdot}79588 \qquad ; \text{daher}} \\ \lg 24 - \lg 625 = \lg\frac{24}{625} = 0{\cdot}58433 - 2 = \lg 0{\cdot}0384\,. \end{array}$$

Anm. Die Charakteristik des Logarithmus einer jeden dekadischen Zahl ist stets dem Exponenten jener Potenz von 10 gleich, mit welcher ihre höchste Ziffer multiplizirt werden muß, um ihren Localwerth auszudrücken.

§. 195.

Erkl. 1. Von den Logarithmen zweier Zahlen, deren eine der reciproke Werth der andern ist, heißt jeder die logarithmische Ergänzung oder das logarithmische Complement des andern. So ist z. B. lg a die logarithmische Ergänzung von $\lg\frac{1}{a}$, und umgekehrt.

Die Summe eines Logarithmus und seiner logarithmischen Ergänzung ist stets $= 0$; denn es ist $\lg\frac{1}{a} = -\lg a$ (§. 182, Zus. 2.), also

$$\lg a + \lg\frac{1}{a} = \lg a + (-\lg a) = 0\,.$$

Bezeichnet man die logarithmische Ergänzung allgemein durch Erg. lg a, so ist also stets $\lg a + \text{Erg.}\lg a = 0$, und daher $\lg a = -\text{Erg.}\lg a$, oder umgekehrt $-\lg a = +\text{Erg.}\lg a$.

2. Die logarithmische Ergänzung eines Logarithmus läßt sich jedesmal leicht unmittelbar aus der Tafel selbst angeben, indem man bei einem halbpositiven Logarithmus die Mantisse von der negativen Charakteristik abzieht und die Differenz positiv nimmt, bei jedem andern aber wie bei der Verwandlung eines negativen in einen halbpositiven Logarithmus verfährt. Es ist z. B.

1) $\lg 0{\cdot}004 = 0{\cdot}60206 - 3$, also $-\lg 0{\cdot}004 = -0{\cdot}60206 + 3$, d. i. $\text{Erg.}\lg 0{\cdot}004 = 2{\cdot}39794$; ebenso ist

2) $\lg 347{\cdot}8 = 2{\cdot}54133$, also $-\lg 347{\cdot}8 = -2{\cdot}54133$, oder $\text{Erg.}\lg 347{\cdot}8 = 0{\cdot}45867 - 3$.

Zus. Man erhält den Logarithmus eines Bruches, wenn man zum Logarithmus des Zählers die logarithmische Ergänzung vom Logarithmus des Nenners addirt. Denn $\lg(a:b) = \lg a - \lg b = \lg a + \text{Erg.}\lg b$ (Nr. 1.). Z. B.

$$\lg \frac{24}{625} = \lg 24 + \text{Erg. } \lg 625 ,$$

$$\lg 24 = 1{\cdot}38021$$

$$\text{Erg. } \lg 625 = 0{\cdot}20412 - 3 \text{, also (wie §. 194, Zus. 3.)}$$

$$\lg \frac{24}{625} = 1{\cdot}58433 - 3 = 0{\cdot}58433 - 2 .$$

§. 196.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen gegebene Zahlen zu multipliziren.

Aufl. u. Bew. Man suche in der Tafel die Logarithmen der einzelnen Faktoren, addire dieselben, und suche die zur Summe, als Logarithmus des Produktes, gehörige Zahl; so ist diese das gesuchte Produkt (§. 181.). Z. B. es sei das Produkt (p) 3457·8 . 0·029196 . 562·45 mittelst Logarithmen zu suchen, so erhält man:

$$\lg 3457{\cdot}8 = 3{\cdot}53880$$

$$+ \lg 0{\cdot}029196 = 0{\cdot}46532 - 2$$

$$+ \lg 562{\cdot}45 = 2{\cdot}75008 \text{ ; also}$$

$$\lg p = 6{\cdot}75420 - 2 = 4{\cdot}75420 ;$$

$$\text{daher } p = N \lg 4{\cdot}75420 = 56780 .$$

§. 197.

Aufg. Gegebene Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmen zu dividiren.

Aufl. Man subtrahire die Summe der Logarithmen des Divisors von der Summe der Logarithmen des Dividends, oder addire die logarithmischen Ergänzungen der Logarithmen des Divisors zu den Logarithmen des Dividends, so ist die zu jener Differenz oder dieser Summe gehörige Zahl der gesuchte Quotient (§. 182. und §. 195, Zus.). Z. B. sei

$$\frac{2675{\cdot}26 \times 0{\cdot}062121 \times 45{\cdot}5342}{25{\cdot}9106 \times 38848{\cdot}3 \times 0{\cdot}00250595} = q ,$$

so haben wir, wenn wir den Zähler mit Z, den Nenner mit N bezeichnen:

I. $\lg q = \lg Z - \lg N$. Nun findet man

$\lg 2675{\cdot}26 = 3{\cdot}42736$	$\lg 25{\cdot}9106 = 1{\cdot}41348$
$\lg 0{\cdot}062121 = 0{\cdot}79324 - 2$	$\lg 38848{\cdot}3 = 4{\cdot}58937$
$\lg 45{\cdot}5342 = 1{\cdot}65834$	$\lg 0{\cdot}00250595 = 0{\cdot}39897 - 3$
daher $\lg Z = 5{\cdot}87894 - 2$	also $\lg N = 6{\cdot}40182 - 3$
$= 3{\cdot}87894$	$= 3{\cdot}40182$

Es wird somit $\lg q = 3{\cdot}87894 - 3{\cdot}40182 = 0{\cdot}47712$, und

$$q = N \lg 0{\cdot}47712 = 3 .$$

II. Es ist auch $\lg q = \lg Z + \text{Erg.} \lg N$; dadurch wird mit Anwendung der logarithmischen Ergänzungen:

$$\begin{aligned} \lg Z &= 3{\cdot}87894 \text{ (wie vorhin)} \\ + \text{Erg.} \lg 25{\cdot}9106 &= 0{\cdot}58652 - 2 \\ + \text{Erg.} \lg 38848{\cdot}3 &= 0{\cdot}41063 - 5 \\ + \text{Erg.} \lg 0{\cdot}00250595 &= 2{\cdot}60103 \\ \hline \text{also } \lg Z + \text{Erg.} \lg N &= 7{\cdot}47712 - 7 \text{, d. i.} \\ \lg q &= 0{\cdot}47712 = \lg 3 . \end{aligned}$$

Anm. Durch Anwendung der logarithmischen Ergänzung wird also die ganze Rechnung in eine Addition verwandelt; sie ist daher besonders dann vortheilhaft, wenn der Divisor aus mehreren Faktoren besteht.

§. 198.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen zu potenziren.

Aufl. Man multiplizire den Logarithmus des Dignands mit dem Exponenten, und suche die zum Produkte, als Logarithmus, gehörige Zahl; so ist diese die verlangte Potenz (§. 183.).

1) $\lg 24^3 = 3 \lg 24 = 3 \,.\, 1{\cdot}38021 = 4{\cdot}14063$; also

$$24^3 = N \lg 4{\cdot}14063 = 13824 .$$

Ebenso findet man:

2) $$\begin{aligned} \lg 0{\cdot}8365^5 = 5 \lg 0{\cdot}8365 &= 5\,(0{\cdot}92247 - 1) \\ &= 4{\cdot}61235 - 5 \\ &= 0{\cdot}61235 - 1 \text{; also} \end{aligned}$$

$$0{\cdot}8365^5 = N \lg (0{\cdot}61235 - 1) = 0{\cdot}40959 \ldots\ldots$$

Wäre der Exponent negativ, so ist z. B.

$$\lg 0{\cdot}4^{-6} = -6 \lg 0{\cdot}4 = -6\,(0{\cdot}60206 - 1) = -3{\cdot}61236 + 6$$
$$= 2{\cdot}38764 \text{ ; also}$$
$$0{\cdot}4^{-6} = 244{\cdot}14 \ldots$$

Anm. Die Resultate lassen sich bei der Rechnung mit Logarithmen nur auf soviele Stellen hinreichend genau angeben, als auf wie viele in der Tafel die Mantissen berechnet sind. Wäre demnach in der Gleichung $n \,.\, \lg a = k{\cdot}m$ die

Kennziffer $k > 5$, so wird die entsprechende Zahl nur bis auf 5 Ziffern bestimmt, und die noch abgehenden durch Nullen ersetzt. Z. B.

$\lg 7^{10} = 10 . 0{\cdot}84510 = 8{\cdot}45100$; mithin $7^{10} = 282480000$.

(Durch wirkliche Potenzirung findet man $7^{10} = 282475249$).

§. 199.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen zu radiziren.

Aufl. u. Bew. Man unterscheide hier zwei Fälle:

I. Ist der Radikand > 1, also die Charakteristik seines Logarithmus positiv, so theile man den letztern durch den Radikator, und suche die zum Quotus, als Logarithmus, gehörige Zahl; so hat man die gesuchte Wurzel (§. 184.). Z. B.

$$\lg \sqrt[5]{59049} = \tfrac{1}{5} \lg 59049 = \tfrac{1}{5} . 4{\cdot}77121 = 0{\cdot}95424\text{; also}$$

$$\sqrt[5]{59049} = N\lg 0{\cdot}95424 = 9 .$$

II. Ist der Radikand < 1, also sein Logarithmus halbpositiv, so vermehre man die negative Charakteristik desselben, falls sie durch den Radikator nicht theilbar ist, um soviele negative Einheiten, daß sie theilbar wird, setze ebenso viele Ganze der positiven Mantisse vor (§. 192, Zus.), und verfahre dann wie vorhin. Z. B.

$$1)\ \lg \sqrt[3]{0{\cdot}00748} = \tfrac{1}{3}(0{\cdot}87390 - 3) = 0{\cdot}29130 - 1\text{; daher}$$

$$\sqrt[3]{0{\cdot}00748} = 0{\cdot}19556 \ldots .$$

$$2)\ \text{Es ist } \lg \sqrt[7]{0{\cdot}0852} = \tfrac{1}{7} \lg 0{\cdot}0852 = \tfrac{1}{7}(0{\cdot}93044 - 2)$$
$$= \tfrac{1}{7}(5{\cdot}93044 - 7) = 0{\cdot}84721 - 1$$
$$= \lg 0{\cdot}70341 \ldots .$$

§. 200.

Aufg. Mit Hilfe der Logarithmen zusammengesetzte Ausdrücke (Summen oder Differenzen) zu berechnen.

Aufl. Man berechne jedes einzelne Glied des gegebenen Ausdruckes, und reduzire die entsprechenden Zahlen, welche dann, wenn es nothwendig sein sollte, noch einmal einer logarithmischen Behandlung unterworfen werden können. Soll z. B. der Werth

des Ausdruckes $\sqrt[6]{(6\sqrt[7]{46} - 2\sqrt[5]{10})^7}$ gefunden werden, so ist

$$\lg \sqrt[6]{(6\sqrt[7]{46} - 2\sqrt[5]{10})^7} = \tfrac{7}{6} \lg (6\sqrt[7]{46} - 2\sqrt[5]{10}) .$$

Setzt man nun $6\sqrt[7]{46} = a$ und $2\sqrt[5]{10} = b$, so wird

$$\lg a = \begin{cases} \lg 6 = 0{\cdot}77815 \\ + \tfrac{1}{7} \lg 46 = 0{\cdot}23753 \end{cases} ; \text{ also}$$

$$\lg a = 1{\cdot}01568 , \text{ und daher}$$

$$a = 10{\cdot}3676 \ldots$$

Ebenso ergibt sich

$$\lg b = \begin{cases} \lg 2 = 0{\cdot}30103 \\ + \tfrac{1}{5} \lg 10 = 0{\cdot}20000 \end{cases} ; \text{ folglich}$$

$$\lg b = 0{\cdot}50103 \text{ und}$$

$$b = 3{\cdot}1698 . \text{ — Es ist demnach}$$

$$6\sqrt[7]{46} - 2\sqrt[5]{10} = a - b = 10{\cdot}3676 - 3{\cdot}1698$$
$$= 7{\cdot}1978 ; \text{ somit}$$

$$\lg \sqrt[6]{(6\sqrt[7]{46} - 2\sqrt[5]{10})^7} = \tfrac{7}{6} \lg 7{\cdot}1978 = \tfrac{7}{6} . 0{\cdot}85720$$
$$= 1{\cdot}00006 = \lg 10{\cdot}0014 ;$$

Der Werth des gegebenen Ausdruckes ist also sehr nahe $= 10$.

Anm. Mit Hilfe der Gauß'schen Tafeln *) erhält man, wie oben,

$$\lg a = 1{\cdot}01568 \text{ und}$$
$$\lg b = 0{\cdot}50103 , \text{ also}$$
$$\lg a - \lg b = 0{\cdot}51465 = B ; \text{ hiezu gehört}$$
$$A = 0{\cdot}35617 ; \text{ daher wird}$$
$$\lg (a - b) = \lg b + A = 0{\cdot}85720 , \text{ und}$$
$$\frac{7}{6} \lg (a - b) = \frac{7 . 0{\cdot}85720}{6} = 1{\cdot}00006 = \lg 10 .$$

*) In der einfachsten und ganz mit der Tafel der briggs'schen Logarithmen übereinstimmenden Anordnung enthalten diese die: Logarithmisch-trigonometrischen Tafeln von Dr. Th. Wittstein. Hannover 1859.

II. Theil. Synthetische Gleichungen.

Von den synthetischen Gleichungen überhaupt.

§. 201.

Erkl. 1. Eine synthetische oder algebraische Gleichung (auch Bestimmungsgleichung) ist der doppelte Ausdruck für ein und dieselbe Größe unter verschiedenen arithmetischen Formen von der Art, daß der Werth einer (oder mehrerer) darin vorkommender Größen vom Werthe der übrigen abhängig ist. (Vergl. §. 6.) Die Glieder der beiden Seiten einer Gleichung, wenn sie complexe Größen sind, heißen Glieder der Gleichung.

2. Jener Theil der Arithmetik, welcher aus gegebenen Zahlen noch unbekannte mittelst synthetischer Gleichungen finden lehrt, wird gewöhnlich Algebra genannt.

§. 202.

Erkl. 1. Der Zweck der synthetischen Gleichungen ist, Größen, welche als unbekannt in Verbindung mit bekannten stehen, zu finden, oder ihren Werth durch letztere auszudrücken.

2. Jene Größe, deren Werth (oder Werthe) man aus einer Gleichung bestimmen soll, nennt man gewöhnlich kurz die Unbekannte, auch die Hauptgröße, und bezeichnet sie durch einen der Endbuchstaben des Alphabetes x, y, z.

3. Das Verfahren, welches man anzuwenden hat, um den Werth einer Unbekannten durch lauter bekannte Größen darzustellen, heißt Auflösung (Solutio) der Gleichung.

4. Jener Werth, welcher durch die Auflösung einer Gleichung für die Unbekannte gefunden wird, wird Aequivalent der Unbekannten, oder Resultat (gewöhnlich weniger passend Wurzel) der Gleichung genannt.

5. Das Aequivalent der Unbekannten muß stets der Gleichung genügen, d. h. statt der Unbekannten in die gegebene Gleichung gesetzt, diese zur identischen machen (§. 6, 4.).

§. 203.

Erkl. Die synthetischen Gleichungen werden in Bezug auf die Verbindung der Unbekannten mit bekannten Größen eingetheilt

1) in algebraische Gleichungen im engern Sinne, wenn die Unbekannten mit bekannten Größen nur durch die vier Grundoperationen verbunden sind, ferner im Dignand einer Potenz oder im Radikand einer Wurzelgröße vorkommen;

2) in transcendente Gleichungen, wenn sie mit bekannten Größen auf andere Weise in Verbindung stehen, z. B. als Potenz- oder Wurzelexponenten vorkommen, wie in $a^x = b^{x+n}$.

§. 204.

Erkl. Die algebraischen Gleichungen lassen sich eintheilen:

1) in Hinsicht auf die bekannten Größen:

a) in numerische oder Zahlengleichungen, wenn außer den Unbekannten nur besondere Zahlen vorkommen;

b) in allgemeine oder Litteralgleichungen, wenn nebst den unbekannten auch die bekannten (gegebenen) Größen durch Buchstaben bezeichnet sind.

2) In Hinsicht auf den Exponenten der Unbekannten:

a) in einfache oder Gleichungen des ersten Grades, auch lineare Gleichungen genannt, wenn die Unbekannte nur in der ersten Potenz (also ohne Exponenten) vorkommt,

b) in zusammengesetzte, wenn die Unbekannte einen größern Exponenten als 1 hat, und zwar nennt man sie in diesem Falle vom sovielten Grade oder der sovielten Ordnung, als der größte Exponent anzeigt, mit dem sie vorkommt.

3) In Beziehung auf die Anzahl der zu suchenden Unbekannten:

a) in Gleichungen mit einer,

b) mit mehrern Unbekannten.

4) In Hinsicht auf den möglichen Werth der Unbekannten:

a) in bestimmte, wenn der Gleichung nur ein oder einige Resultate genügen, deren Anzahl jedoch im Voraus bekannt ist,

b) in unbestimmte, wenn eine Unbekannte unzählig viele oder eine im Voraus nicht angebbare Anzahl Werthe erhalten kann,

c) in unmögliche, wenn (für praktische Fälle) die Auflösung ein undenkbares oder unzulässiges Resultat gibt; endlich

5) in Hinsicht auf die Verbindung der Unbekannten mit Wurzeln:

a) in rationale, wenn die Unbekannte in keinem Gliede der Gleichung sich als Wurzelgröße oder mit gebrochenem Exponenten befindet,

b) in irrationale, wenn sie in einem oder mehrern Gliedern unter einem Wurzelzeichen oder mit gebrochenem Exponenten vorkommt.

§. 205.

Erkl. 1. Eine zusammengesetzte Gleichung heißt

a) rein, wenn die Unbekannte nur mit einem und demselben Exponenten vorkommt, z. B. $ax^n + b = c - dx^n$,

b) unrein oder gemischt, wenn sie verschiedene Exponenten hat, und zwar nennt man sie in diesem Falle wieder

α) vollständig, wenn die Unbekannte mit allen Exponenten vom größten abwärts vorkommt, z. B. $x^3 + ax^2 + bx = c$,

β) unvollständig, wenn eine oder einige Potenzen der Unbekannten fehlen, z. B. $ax^4 - bx^2 = c$.

2. Die einfachen oder Gleichungen des ersten und die des zweiten Grades (die man gewöhnlich quadratische nennt) heißen niedere, alle übrigen höhere Gleichungen.

Anm. Gegenstand der Elementar-Algebra sind alle niedern Gleichungen, zu welcher Gattung des §. 204. sie gehören mögen, ferner die reinen höhern, einige transcendente und unvollständige höhere Gleichungen, die sich wie niedere behandeln oder in solche umwandeln lassen.

§. 206.

Erkl. 1. Jede Aenderung der Glieder einer Gleichung, wodurch die Gleichheit der beiden Seiten nicht aufgehoben wird, oder

wodurch die Gleichung beständig bleibt, nennt man Transformation (Umformung) derselben. — Sie stützt sich auf den allgemeinen Grundsatz: „Gleiches auf gleiche Weise geändert gibt wieder Gleiches."

2. Ist eine Gleichung so lange transformirt, bis sie lauter einzelne einfache Glieder enthält, namentlich die Unbekannte in keinem Nenner mehr vorkommt, so heißt sie entwickelt.

3. Erhält eine entwickelte Gleichung eine solche Gestalt, daß die Unbekannte ganz allein, d. i. a) nur einmal, b) mit positivem Zeichen, c) mit dem Koëffizienten 1 und d) mit dem Exponenten 1 (also ohne beide) auf der einen (gewöhnlich der ersten), alle bekannten Größen dagegen (in möglichst reduzirter Form) auf der andern Seite der Gleichung stehen, so ist die Gleichung aufgelöst. Hat z. B. die Gleichung $\frac{a}{m-x} = \frac{b}{n+x}$ durch Transformation die Form erhalten $an + ax = bm - bx$; so ist sie entwickelt. Erhält diese letztere noch die Form $x = \frac{bm-an}{a+b}$, so ist die gegebene Gleichung aufgelöst.

4. Eine aufgelöste Litteralgleichung, welche auf alle Fälle derselben Art anwendbar ist, heißt eine (allgemeine) Formel.

§. 207.

Lehrs. In einer Gleichung läßt sich jedes Glied mit Veränderung seines Vorzeichens in das entgegengesetzte von der einen auf die andere Seite bringen. (Man nennt diese Uebertragung Transposition.)

Bew. Die beiden Seiten einer Gleichung sind gleiche Ausdrücke, bleiben daher gleich, wenn man beide um Gleiches vermehrt oder vermindert (§. 11. und §. 23.). Addirt man aber ein beliebiges Glied mit entgegengesetztem Zeichen zu beiden Seiten, so fällt es auf der einen Seite (auf der es anfänglich stand) weg, und kommt auf der andern mit dem entgegengesetzten Zeichen hinzu. Ist z. B. $2x - a = x - b$, und man addirt beiderseits $a - x$, so wird $2x - a + (a - x) = x - b + (a - x)$, oder

$$2x - a + a - x = x - b + a - x, \text{ oder}$$

$$x = a - b,$$

und die Gleichung ist hiedurch auch (nach §. 206, 3) aufgelöst.

Substituirt man diesen Werth von x in die gegebene Gleichung, so wird

$$2(a - b) - a = a - b - b, \text{ oder}$$

$$a - 2b = a - 2b$$

eine identische Gleichung. (Vergl. §. 202, 5).

Zus. 1. Es können also alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die eine, und jene, welche nur bekannte Größen enthalten, durch Transposition auf die andere Seite der Gleichung geschafft werden.

Zus. 2. In jeder Gleichung lassen sich alle Glieder auf eine Seite bringen. Aus $ax + b = nx - c$ erhält man z. B. durch Transposition $ax - nx + b + c = 0$.

Die Uebertragung aller Glieder einer Gleichung auf eine Seite nennt man die Gleichung auf Null bringen oder annulliren.

Zus. 3. Kommt in einer Gleichung ein und dasselbe Glied auf beiden Seiten mit dem nämlichen Zeichen vor, so kann man es geradezu weglassen. So ist z. B. die Gleichung $5x + 3a - 2b = 4d + 3a - 2b + c$ einerlei mit $5x = 4d + c$.

Anm. Daß man die beiden Seiten einer Gleichung vertauschen, d. h. die erste zur zweiten, und diese zur ersten machen kann, versteht sich wohl von selbst.

§. 208.

Lehrs. Eine Gleichung bleibt beständig, wenn man beide Seiten (oder alle Glieder) derselben mit der nämlichen Zahl multiplizirt.

Bew. Es wird dadurch Gleiches mit Gleichem multiplizirt (§. 39.). Ist z. B.

$$\text{a)} \quad \frac{x}{a} = b \quad \text{oder} \quad \text{b)} \quad \frac{x}{5} = 14; \text{ so ist auch}$$

$$\frac{x}{a} \cdot a = b \cdot a \quad \text{''} \quad \frac{x}{5} \cdot 5 = 14 \cdot 5, \text{ d. i.}$$

$$x = ab \quad \text{''} \quad x = 70.$$

Ebenso, wenn $\frac{x}{a} - m = \frac{x}{b} - n$, dann ist auch

$$ab\left(\frac{x}{a} - m\right) = ab\left(\frac{x}{b} - n\right), \text{ oder}$$

$$bx - abm = ax - abn.$$

Zus. 1. Eine Gleichung kann demnach von Brüchen befreit werden, indem man alle Glieder derselben mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner jener Brüche multiplizirt.

Gewöhnlich verfährt man hiebei kürzer auf folgende Art: Man sucht für alle vorkommenden Nenner den Generalnenner, dividirt ihn durch jeden speziellen, und multiplizirt mit dem Quotus den betreffenden Zähler (wobei man die in der Gleichung vorkommenden ganzen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 betrachten kann). Z. B. für die Gleichung

$$\frac{3x + 6}{8} - \frac{21 + x}{3} = 9 - \frac{5x}{2}$$

ist 24 Generalnenner. Nach obiger Regel verfahren erhalten wir unmittelbar $3(3x + 6) - 8(21 + x) = 24.9 - 12.5x$, eine Gleichung, die keinen Bruch mehr enthält. Hieraus folgt durch wirkliche Multiplikation:

$$9x + 18 - 168 - 8x = 216 - 60x \text{ oder}$$
$$x - 150 = 216 - 60x .$$

Zus. 2. Haben alle Glieder einer Gleichung denselben Nenner, so kann dieser geradezu (der Gleichheit unbeschadet) wegbleiben.

Zus. 3. In jeder Gleichung lassen sich die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandeln. Denn man kann sie als mit -1 multiplizirt betrachten. Ist z. B.

$$a - x = nx - b \text{, so ist auch}$$
$$-a + x = -nx + b .$$

Anm. Bei der Entfernung der Nenner ist es praktisch bequem, so viele Glieder als möglich in ein einziges zusammenzufassen, weil dann desto weniger zu multiplıziren ist, je weniger Glieder eine Gleichung hat.

§. 209.

Lehrs. Eine Gleichung bleibt beständig, wenn man beide Seiten derselben (d. i. alle Glieder) durch die nämliche Zahl dividirt.

Bew. Es wird Gleiches durch Gleiches getheilt, man erhält daher gleiche Quotienten (§. 59.). — Wenn z. B.

a) $ax = b$ oder b) $7x = 63$, so ist auch

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a} \quad " \quad \frac{7x}{7} = \frac{63}{7}, \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{b}{a} \quad " \quad x = 9 .$$

Zus. 1. Nach diesem Satze kann also auch jedes beliebige Glied einer Gleichung von seinem Koëffizienten befreit werden.

z. B. aus $ax - b = c$ folgt, wenn man den Faktor a von x trennen will,

$$x - \frac{b}{a} = \frac{c}{a}\,; \quad \text{also} \quad x = \frac{b+c}{a}\,.$$

Zus. 2. Haben alle Glieder einer Gleichung einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird sie einfacher, wenn man sie durch denselben gleich anfangs dividirt. So ist z. B. die Gleichung

$$a^2x - am = abm - acx \text{ einerlei mit}$$
$$ax - m = bm - cx\,.$$

Manchmal werden dadurch auch scheinbar höhere Gleichungen zu niedern. Z. B. durch Division mit x^n verwandelt sich die Gleichung

$$\frac{ax^n}{b+cx} = \frac{mx^n}{d-gx} \text{ in } \frac{a}{b+cx} = \frac{m}{d-gx}\,.$$

§. 210.

Lehrs. Eine Gleichung bleibt beständig, wenn man beide Seiten derselben (aber nicht die einzelnen Glieder) mit einerlei Exponenten potenzirt oder radizirt.

Bew. Aus der Gleichheit der Dignanden und Exponenten folgt die Gleichheit der Potenzen (§. 134.); ebenso sind gleiche Wurzeln aus gleichen Zahlen gleich (§. 155.). Ist daher z. B.

$$\sqrt[5]{x+a} = m\,; \text{ so ist auch } \left(\sqrt[5]{x+a}\right)^5 = m^5\,; \text{ also}$$
$$x + a = m^5 \text{ (§. 151, Zus. 1.)}$$

Ebenso, wenn $x^n = b + c$; so ist auch $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b+c}$, d. i.

$$x = \sqrt[n]{b+c}\,.$$

Zus. 1. Mittelst Potenzirung läßt sich also die Unbekannte von einem Wurzelzeichen befreien, oder eine irrationale Gleichung sich rational machen.

Zus. 2. Mittelst Radizirung kann die Unbekannte von einem Exponenten befreit werden.

§. 211.

Lehrs. Eine Gleichung bleibt beständig, wenn man beide Seiten derselben (für die nämliche Basis) logarithmirt, oder delogarithmirt.

Bew. Zu gleichen Zahlen gehören gleiche Logarithmen und umgekehrt (§. 180, Lehrſ. und Zuſ. 1.). — Iſt z. B.

a) $a^x = b$ oder b) $5^x = 625$, ſo iſt auch

$x \lg a = \lg b$ „ $x \lg 5 = \lg 625$; alſo

$$x = \frac{\lg b}{\lg a} \text{ „ } \quad x = \frac{\lg 625}{\lg 5}.$$

Zuſ. Kann man daher in einer Gleichung von der Verbindung der Zahlen auf die ihrer Logarithmen (oder umgekehrt) übergehen; ſo läßt ſie ſich auflöſen, wenn in ihr die Unbekannte als Exponent vorkommt.

Anm. Die §§. 207—211 enthalten die Transformationsgeſetze, auf welchen die Auflöſung aller Gleichungen beruht, d. h. durch deren Anwendung einer algebraiſchen Gleichung eine ſolche Geſtalt gegeben werden kann, die ſie zur eigentlichen Auflöſung paſſend macht. Wie aber dieſe Regeln anzuwenden ſeien, um auf dem einfachſten und kürzeſten Wege zu dem geſuchten Reſultate zu gelangen, hängt von der Beſchaffenheit der gegebenen Gleichung, von einer genauen Betrachtung derſelben und beſonders von Uebung ab. — Als Hauptregel mag ſich der Anfänger merken, nach jeder Transformation zu unterſuchen, ob ſich nicht der eben erhaltenen Gleichung auf irgend eine Weiſe, z. B. durch Reduktion gleichartiger Glieder, durch Diviſion u. ſ. f. eine einfachere oder kürzere Geſtalt geben laſſe.

§. 212.

Aufg. Eine irrationale Gleichung rational zu machen, d. h. in eine andere zu verwandeln, in der die Unbekannte nicht mehr als Wurzelgröße vorkommt.

Aufl. u. Bew. Wir unterſcheiden hiebei folgende Fälle:

I. Hat die Gleichung nur ein irrationales Glied, ſo ſtelle man dieſes allein auf eine Seite, die rationalen dagegen auf die andere, und erhebe hierauf beide Seiten dieſer transformirten Gleichung zur Potenz des Radikators; ſo iſt die Gleichung rational (§. 207. und §. 210.). Z. B. aus $a + \sqrt{bx - c} = m$ folgt durch Transpoſition

$\sqrt{bx - c} = m - a$; daher (nach §. 210.),

$bx - c = (m - a)^2$.

Enthält die Gleichung mehrere irrationale, aber gleichartige Glieder, ſo werden dieſe in eines reduzirt, und dann wie oben verfahren.

II. Hat eine Gleichung nur zwei irrationale Glieder, ſo ſtelle man das eine auf die erſte, das andere auf die zweite Seite,

und potenzire dann beide Seiten mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der beiden Radikatoren. — Wenn z. B.

$$\sqrt[4]{x^2 + 5ax - b^2} - \sqrt{a + x} = 0\,;$$ so ist auch

$$\sqrt[4]{x^2 + 5ax - b^2} = \sqrt{a + x}\,.$$

Potenzirt man beiderseits mit 4, so ergibt sich die rationale Gleichung

$$x^2 + 5ax - b^2 = (a + x)^2\,.$$

Sind beide Glieder gleichnamig, so kann man die Wurzelzeichen geradezu weglassen; denn es ist z. B. offenbar

$\sqrt[n]{a \pm x} = \sqrt[n]{bx \pm c}$ einerlei mit $a \pm x = bx \pm c$.

III. Hat eine Gleichung zwei gleichnamige irrationale und ein rationales, oder drei gleichnamige irrationale Glieder, die alle Quadratwurzeln sind, so wird zuerst Nr. II. angewendet, und dann, nachdem möglichst reduzirt worden, nach Nr. I. verfahren. Z. B. aus

$\sqrt{x + 11} - \sqrt{x - 9} = 2$ folgt

$\sqrt{x + 11} = 2 + \sqrt{x - 9}$; daher auch

$(\sqrt{x + 11})^2 = (2 + \sqrt{x - 9})^2$, d. i.

$$x + 11 = 4 + 4\sqrt{x - 9} + x - 9\,.$$

Hieraus wird durch Transposition und Reduktion:

$16 = 4\sqrt{x - 9}$, oder durch 4 abgekürzt:

$4 = \sqrt{x - 9}$; also durch Quadrirung

$$16 = x - 9\,.$$

Man finde aus $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 11} = \sqrt{44 + x}$ die rationale entwickelte Gleichung

$$3x^2 + 118x = 665\,.$$

Anm. Dieser letztere Fall findet auch noch Anwendung, wenn eine Gleichung drei irrationale und ein rationales, oder vier irrationale Glieder hat, die sämmtlich Quadratwurzeln sind; ebenso wenn sie zwei ungleichnamige oder zwar gleichnamige irrationale Glieder hat, die aber höhere, als Quadratwurzeln enthalten; diese führen jedoch auf Gleichungen, welche die Grenzen dieses Lehrbuches überschreiten.

§. 213.

Erkl. 1. Eine Aufgabe, welche verlangt, aus gewissen in Worten ausgesprochenen Bedingungen den Werth unbekannter Größen durch Gleichungen zu finden, heißt eine algebraische Aufgabe oder ein algebraisches Problem.

2. Unter Bedingungen einer Aufgabe versteht man die (gegebenen) Eigenschaften der Unbekannten, ihre Beziehung zu und Verbindung mit bekannten Größen.

3. Die Herstellung einer Gleichung aus gegebenen Bedingungen einer Aufgabe (d. i. die Uebertragung des Wortausdruckes derselben in die arithmetische Zeichensprache) heißt Formation oder Ansatz.

4. Die durch den Ansatz erhaltene Gleichung wird Bedingungsgleichung genannt.

§. 214.

Aufg. Eine algebraische Aufgabe anzusetzen.

Aufl. Eine allgemeine Regel läßt sich hinsichtlich der Formation einer Gleichung nicht aufstellen, sie ist Sache des Verstandes, kann daher nur durch Nachdenken und Uebung zu einer gehörigen Fertigkeit gebracht werden. — Als Hauptregel merke sich der Anfänger Folgendes: „Man sehe zuerst, was unbekannt ist, bezeichne dieses Unbekannte durch irgend ein Symbol (z. B. x), bringe es dann mit den in der Aufgabe enthaltenen Daten in die entsprechende Verbindung, d. h. suche alle Bedingungen der Aufgabe, die genau zu erwägen sind, durch arithmetische Zeichen, Buchstaben und Zahlen auszudrücken, und so einen doppelten Ausdruck für ein und dieselbe Sache herzustellen." (Vergl. §. 201, 1.) Z. B. Man habe folgende Aufgabe:

Wenn man das 8fache einer Zahl um 9 vermehrt, die erhaltene Summe durch 15 theilt und vom Quotus den sechsten Theil jener Zahl abzieht; so erhält man eine Zahl, die um 2 größer ist, als der vierte Theil der gedachten. Welche Zahl ist es?

Ansatz. Die gedachte Zahl sei x, so ist ihr 8faches 8x; vermehrt man dieses um 9, und theilt die Summe durch 15, so erhält man als Quotus $\frac{8x + 9}{15}$; zieht man hievon den sechsten

Theil der gedachten Zahl, d. i. $\frac{x}{6}$ ab, so bleibt als Rest $\frac{8x+9}{15} - \frac{x}{6}$. Da nun dieser Rest um 2 größer ist, als der vierte Theil der gedachten Zahl, d. i. $\frac{x}{4}$, so wird der letztere, wenn man ihn um 2 vermehrt, jenem Reste gleich werden. Daher ist die Bedingungsgleichung $\frac{8x+9}{15} - \frac{x}{6} = \frac{x}{4} + 2$.

Man findet hieraus $x = 12$, welche Zahl sowohl der Gleichung genügt, als auch den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wie man sich leicht überzeugen kann.

Anm. In Bezug auf zwei von einander abhängige Zahlen mag hier noch Folgendes bemerkt werden: 1) Ist ihre Summe $= s$, und man setzt die eine von ihnen $= x$; so ist die andere $s - x$. 2) Ist ihre Differenz d, und die kleinere x, so ist die größere $= x + d$; ist aber die größere x, so ist die kleinere $= x - d$. 3) Ist ihr Produkt p und die eine x, so ist die andere $= p : x$. 4) Ist ihr Quotient q, und die kleinere $= x$, so ist die größere $= qx$; bezeichnet man aber die größere durch x, dann ist die kleinere $= x : q$. 5) Geben zwei Zahlen q zum Quotus, und r als Rest, und die kleinere ist x, so ist die größere $= qx + r$; wird dagegen die größere x genannt, dann ist die kleinere $= (x - r) : q$.

I. Abschnitt. Von den niedern algebraischen Gleichungen.

I. Kap. Von den bestimmten Gleichungen des ersten Grades.

A. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 215.

Erkl. 1. Eine bestimmte einfache Gleichung ist jene, in welcher nur eine einzige Unbekannte, und diese, nachdem die Gleichung entwickelt ist, nur in der ersten Potenz vorkommt (vgl. §. 204. 2, a).

2. Jede einfache Gleichung kann auf die Form $ax = b$ gebracht werden, in welcher a und b was immer für bekannte Zahlen vorstellen, und heißt, wenn sie diese Form hat, geordnet.

§. 216.

Aufg. Eine gegebene einfache Gleichung aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man bringe dieselbe mittelst gehöriger Anwendung der Transformationsgesetze auf die Form $ax = b$, und dividire dann beide Seiten durch den Koëffizienten (Faktor) von x; so wird $x = \frac{b}{a}$, und die Gleichung ist aufgelöst (§. 206, 3).

Beispiele:

Man suche den Werth von x aus folgenden Gleichungen:

1) $2\frac{1}{2} + \frac{18 - x}{3} = 1\frac{2}{9}x - \frac{1}{3} - \frac{2x - 3}{10} + \frac{2}{5}$.

Durch Einrichten der gemischten Zahlen und Transposition jener Glieder, deren Nenner 3 und 9 sind, auf die eine, der übrigen Glieder auf die andere Seite, erhält man

$$\frac{18 - x}{3} - \frac{11x}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5} - \frac{2x - 3}{10} - \frac{5}{2}.$$

Bringt man die Glieder der ersten, ebenso die der zweiten Seite auf gleiche Benennung, und reduzirt dann, so wird

$$\frac{54 - 3x - 11x + 3}{9} = \frac{4 - 2x + 3 - 25}{10}, \text{ oder}$$

$$\frac{57 - 14x}{9} = \frac{-2x - 18}{10}, \text{ oder}$$

$$\frac{14x - 57}{9} = \frac{2x + 18}{10} \text{ (§. 208, Zus. 3), oder}$$

$$\frac{14x - 57}{9} = \frac{x + 9}{5} \text{ (§. 95.).}$$

Schafft man die Brüche weg, so erhält man

$$5(14x - 57) = 9(x + 9), \text{ oder}$$

$$70x - 285 = 9x + 81.$$

Hieraus folgt durch Transposition:

$$70x - 9x = 285 + 81, \text{ d. i.}$$

$$61x = 366; \text{ also}$$

$$x = 366 : 61 = 6.$$

2) $3\frac{1}{5}x^n - \frac{4\frac{1}{2}x^n - x^{n+1}}{8} = 2{\cdot}7x^n$.

Durch Entfernung der gemischten Zahlen und Division der ganzen Gleichung mit x^n wird

$$3{\cdot}2 - \frac{4{\cdot}5 - x}{8} = 2{\cdot}7 \text{ ; hieraus}$$

$$3{\cdot}2 - 2{\cdot}7 = \frac{4{\cdot}5 - x}{8} \text{ oder}$$

$$0{\cdot}5 . 8 = 4{\cdot}5 - x \text{ , also}$$

$$x = 4{\cdot}5 - 4 = 0{\cdot}5 .$$

3) $$\frac{a^2b + x}{b^2} - \frac{b^2 - x}{a^2b} = \frac{x - b}{a^2} - \frac{ab - x}{b^2} .$$

Durch Wegschaffung der Brüche, deren Generalnenner a^2b^2 ist, erhält man

$$a^4b + a^2x - b^3 + bx = b^2x - b^3 - a^3b + a^2x \text{ , oder}$$

$$a^4b + bx = b^2x - a^3b \text{ (§. 207, Zus. 3.), oder}$$

$$b^2x - a^3b = a^4b + bx \text{ ; hieraus}$$

$$b^2x - bx = a^4b + a^3b \text{ , oder}$$

$$bx - x = a^4 + a^3 \text{ (§. 209, Zus. 2.), oder}$$

$$(b - 1)\, x = a^3 (a + 1) \text{ ; also}$$

$$x = \frac{a^3 (a + 1)}{b - 1} .$$

4) $$x - \frac{2x^2 - 3{\cdot}6}{2x + 3} = 1{\cdot}8 - \frac{7x + 9}{20x + 15} .$$

Jede Seite für sich eingerichtet gibt

$$\frac{2x^2 + 3x - 2x^2 + 3{\cdot}6}{2x + 3} = \frac{36x + 27 - 7x - 9}{20x + 15} \text{ , oder}$$

$$\frac{3x + 3{\cdot}6}{2x + 3} = \frac{29x + 18}{20x + 15} .$$

Durch Entfernung der Brüche folgt

$$(3x + 3{\cdot}6)(20x + 15) = (29x + 18)(2x + 3) \text{ , oder}$$

$$60x^2 + 72x + 45x + 54 = 58x^2 + 36x + 87x + 54 \text{, oder}$$

$$60x^2 + 117x = 58x^2 + 123x .$$

Kürzt man durch x ab, und transponirt, so ergibt sich

$$60x - 58x = 123 - 117 \text{ , d. i.}$$

$$2x = 6 \text{ ; also}$$

$$x = 3 .$$

5) $a + \sqrt{a^2 + x\sqrt{x^2 + m}} = x$.

Transponirt man a, und quadrirt dann, so wird

$$a^2 + x\sqrt{x^2 + m} = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \text{ , oder}$$

$$x\sqrt{x^2 + m} = x^2 - 2ax .$$

Kürzt man durch x ab, und erhebt wieder zum Quadrate, so erhält man

$$x^2 + m = (x - 2a)^2 = x^2 - 4ax + 4a^2 \text{ , oder}$$

$$m = - 4ax + 4a^2 \text{ , also}$$

$$4ax = 4a^2 - m \text{ , und daher}$$

$$x = \frac{4a^2 - m}{4a} = a - \frac{m}{4a} .$$

§. 217.

Aufgaben (algebraische), deren Auflösung auf einfache Gleichungen mit einer Unbekannten führt *).

1) Welche Zahl wird von ihrem m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Theil zusammen um a Einheiten übertroffen?

$$\text{Gleichung: } \frac{x}{m} + \frac{x}{n} + \frac{x}{p} - a = x .$$

$$\text{Resultat: } x = \frac{amnp}{mn + mp + np + mnp} .$$

2) Von welchen zwei Zahlen ist die Summe s, der Unterschied d?

$$\text{Gl. } x - (s - x) = d .$$

Hieraus erhält man für die größere oder

$$x = \tfrac{1}{2}(s + d) = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d \text{, für die kleinere}$$

$$s - x = \tfrac{1}{2}(s - d) = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d .$$

Man gebe diese einen häufig vorkommenden Fall enthaltenden Formeln in Worten!

---

*) In den folgenden Aufgaben ist die Bedingungsgleichung (so viel als möglich dem Wortlaute der Aufgabe gemäß) und das Resultat gegeben, die Formation selbst wird dem Nachdenken des Lernenden und der mündlichen Erklärung des Lehrers überlassen. — Zugleich wird erinnert, nicht zu unterlassen, mit dem Resultate die Probe zu machen; ferner die Aufgabe zu ändern, so daß eine andere der vorkommenden Größen unbekannt wird.

3) Ein Vater ist gegenwärtig n mal so alt, als sein Sohn; nach a Jahren aber wird das Alter des letztern den m^{ten} Theil von dem des Vaters betragen. Wie alt sind beide?

Gl. $x + a = \frac{nx + a}{m}$; Res. $x = \frac{a(m - 1)}{n - m}$.

4) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden; die erste allein füllt ihn in a, die zweite in b, die dritte in c Stunden. Wie lange werden alle drei zugleich brauchen?

Gl. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1$; Res. $x = \frac{abc}{ab + ac + bc}$.

5) Von drei Schreibern kann der erste in a Tagen m Bogen, der zweite in b Tagen n und der dritte in c Tagen p Bogen liefern. Wie lange werden alle drei zu thun haben, um q Bogen zu liefern?

Gl. $\frac{mx}{a} + \frac{nx}{b} + \frac{px}{c} = q$;

Res. $x = \frac{abcq}{bcm + acn + abp}$.

6) Einem Bedienten wurden als Jahreslohn a fl. und eine Livree bedungen. Er verließ aber nach n Monaten den Dienst, erhielt noch b fl. und durfte die Livree behalten. Wie hoch war diese angeschlagen?

Gl. $(a + x)\frac{n}{12} = b + x$; Res. $x = \frac{an - 12b}{12 - n}$.

7) Ein Geselle erhielt von seinem Meister für jeden Tag, an dem er arbeitete, a kr.; dagegen mußte er für jeden Tag, an dem er nicht arbeitete, b kr. für die Kost vergüten. Als nach n Tagen abgerechnet wurde, erhielt der Geselle vom Meister noch c fl. Wie viele Tage hatte er gearbeitet?

Gl. $ax - b(n - x) = 60c$; Res. $x = \frac{60c + bn}{a + b}$.

8) Jemand verwendete jährlich den n^{ten} Theil seines Einkommens auf den Ankauf von Büchern. Als dasselbe um a fl. erhöht wurde, konnte er den m^{ten} Theil, ohne Schmälerung der übrigen Auslagen, auf Bücher verwenden. Wie groß war sein Einkommen vor der Erhöhung?

Gl. $\frac{(n-1)x}{n} = \frac{(m-1)(x+a)}{m}$;

Res. $x = \frac{an(m-1)}{n-m}$.

9) Ein Vater schickte seinen Sohn mit Aepfeln auf den Markt, mit der Weisung, je n Aepfel für a Kreuzer zu geben. Der Sohn konnte jedoch nur s von den größern Stücken zu diesem Preise anbringen, von den übrigen mußte er je m Aepfel für b kr. geben, und brachte deßhalb um ebenso viel Geld weniger heim, als er für jene s Aepfel gelöst hatte. Wie viele Aepfel hat er verkauft?

Gl. $\frac{ax}{n} - \frac{as}{n} = \frac{(x-s)b}{m} + \frac{as}{n}$;

Res. $x = \frac{s(2am - bn)}{am - bn}$.

10) Jemand hat zwei Materien A und B. Von A ist der Werth der Einheit $= a$, von B dagegen $= b$. Er will nun beide mischen, so daß die Mischung n Theile (Einheiten) enthält, deren jeder den Werth c hat. Wie viele Theile sind von jeder Materie zu nehmen?

Gl. $ax + b(n - x) = cn$;

Res. $x = \frac{n(c-b)}{a-b}$, und $n - x = \frac{n(a-c)}{a-b}$.

11) Zwei Meister nehmen um a fl. eine Arbeit in Accord. Der erste stellt m Arbeiter auf t Tage, der zweite n Arbeiter auf τ Tage. Wie viel erhält jeder von den a fl.?

Gl. $\frac{x}{mt} = \frac{a-x}{n\tau}$;

Res. $x = \frac{amt}{mt + n\tau}$, und $a - x = \frac{an\tau}{mt + n\tau}$.

12) Ein Körper, welcher aus zwei Materien A und B besteht, wiegt p ℔, und verliert im Wasser π ℔ seines Gewichtes. Man weiß ferner, daß a ℔ der Materie A im Wasser α ℔, und b ℔ der andern Materie β ℔ verlieren; es frägt sich nun, wie viele ℔ von jeder Materie der Körper enthalte? *)

*) Archimedisches Problem.

Gl. $\frac{\alpha x}{a} + \frac{(p - x)\beta}{b} = \pi$;

Res. $x = \frac{a(b\pi - \beta p)}{\alpha b - a\beta} = \frac{a(\beta p - b\pi)}{a\beta - \alpha b}$, von A.

13) Ein Körper, der p ℔ wiegt, und aus einer Materie besteht, die schwerer ist als Wasser, soll mit einem leichtern so verbunden werden, daß er im Wasser schwimmt. Wie viele ℔ sind von dem leichtern zu nehmen, wenn sein spezifisches Gewicht $= s'$, das des schwerern $= s$, und das des Wassers $= 1$ ist?

Gl. $\frac{p}{s} + \frac{x}{s'} = p + x$ *) ; Res. $x = \frac{ps'(s-1)}{s(1-s')}$.

14) Zwei Mühlen werden von zwei Gerinnen getrieben. Das erste Rad hat bereits n Umläufe gemacht, als das zweite in Bewegung gesetzt wurde, das in einer Minute a Umläufe, während das erste in derselben Zeit b Umläufe macht. Dagegen liefert die zweite Mühle bei c Umläufen des Wasserrades ebenso viel Mehl, als die erste bei d. Wie viele Umläufe muß das zweite Rad machen, bis die Mühle ebenso viel Mehl als die erste geliefert hat?

Gl. $\frac{dx}{c} = \frac{bx}{a} + n$; Res. $x = \frac{acn}{ad - bc}$.

15) Zwei Körper bewegen sich in einer Linie nach derselben Richtung. Der Körper A macht in a Zeiteinheiten (z. B. Tagen, Stunden) α Raumeinheiten (z. B. Meilen). Der Körper B, welcher seine Bewegung um d Zeiteinheiten später, und von einem um n Raumeinheiten mehr rückwärts gelegenen Orte beginnt, legt in c Zeiteinheiten γ Raumeinheiten zurück. Es frägt sich, wann er den Körper A einholen wird?

Gl. $\frac{\gamma x}{c} = \frac{\alpha(x + d)}{a} + n$; Res. $x = \frac{c(an + \alpha d)}{a\gamma - \alpha c}$.

Welche Folgerungen ergeben sich hieraus, wenn entweder $n = 0$, oder $d = 0$ gesetzt wird? Welche einfachere Gestalt erhält die Formel, wenn $a = c = 1$ wird? welche, wenn B früher sich zu bewegen anfängt, also d negativ wird? welche, wenn n negativ ist?

*) Das (absolute) Gewicht eines Körpers durch sein spezifisches Gewicht getheilt gibt das Volumen des Körpers, d. i. den Raum, den er einnimmt, das spezifische Gewicht des Wassers = 1 angenommen.

16) Wann werden sich zwei Körper treffen, welche unter den Bedingungen der vorigen Aufgabe einander auf demselben Wege entgegengehen, wenn die Entfernung der beiden Orte, von denen sie ausgehen, gleich n ist?

Gl. $\frac{\gamma x}{c} + \frac{\alpha(x + d)}{a} = n$; Ref. $x = \frac{c(an - \alpha d)}{a\gamma + \alpha c}$.

17) Jemand ist in drei auf einander folgenden Spielen unglücklich, und verliert sein Geld bis auf a fl., und zwar im ersten den n^{ten} Theil seines mitgebrachten Geldes und n fl.; im zweiten den n^{ten} Theil des Restes und n fl.; im dritten wieder den n^{ten} Theil des vorigen Restes weniger n fl. Wie viel Geld hat er mitgebracht?

Gl. $\left[\left(\frac{(n-1)x}{n} - n\right)\frac{n-1}{n} - n\right] \cdot \frac{n-1}{n} + n = a$;

Ref. $x = \frac{n^2[n(a-1) + (n-1)^2]}{(n-1)^3}$.

18) Ein Vater verordnete in seinem Testamente, daß von seinem ganzen Vermögen das erste Kind a fl. und den n^{ten} Theil des Restes, das zweite 2a fl. nebst dem n^{ten} Theile des jetzigen Restes, und so jedes folgende Kind a fl. mehr, als das zunächst vorhergehende, nebst dem n^{ten} Theile des jedesmaligen Restes erhalten soll. Auf diese Weise bekamen alle Kinder gleich viel. Wie groß war das Vermögen, was erhielt jedes Kind, und wie viele Erben waren es?

Gl. $\frac{x + a(n-1)}{n} = \frac{(n-1)x + a(n-1)(2n-1)}{n^2}$;

Ref. $x = a(n-1)^2$. Jedes Kind erhielt $a(n-1)$ fl.; die Anzahl der Erben war daher: $n - 1$.

B. Einfache Gleichungen mit mehrern Unbekannten.

§. 218.

Erkl. 1. Eine Gleichung, die sich auf die allgemeine Form: $ax + by + cz + dv + \ldots = q$ (in welcher die Buchstaben x, y, z, v . . . unbekannte, alle übrigen was immer für bekannte Größen bezeichnen) bringen läßt, heißt eine einfache Gleichung mit mehrern Unbekannten.

2. Eine Gleichung mit mehrern Unbekannten heißt geordnet, wenn sie auf obige Form gebracht ist und die bekannten Größen a, b, c . . . ganze Zahlen sind.

3. Sollen Gleichungen mit mehrern Unbekannten für bestimmte Werthe dieser Unbekannten aufgelöst werden, so müssen a) ebenso viele Gleichungen gegeben sein (oder in praktischen Fällen sich bilden lassen), als Unbekannte zu suchen sind; b) dieselben müssen wesentlich verschieden (ganz von einander unabhängig) sein, d. h. es darf keine eine bloße Tansformation einer andern, also dieselbe Gleichung nur in anderer Form sein. — Es ist z. B. leicht einzusehen, daß die Gleichung $ax + by = c$ nicht hinreicht, um beide Unbekannten x und y zu bestimmen, indem offenbar der Werth einer jeden von dem der andern abhängig, jede eine sogenannte Funktion der andern ist.

4. Die Auflösung von Gleichungen mit mehrern Unbekannten beruht auf der Elimination, d. i. auf dem Verfahren, alle Unbekannten bis auf eine (gleichgiltig welche) nach und nach zu entfernen, so daß am Ende nur eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden ist. Ist aus dieser nach den bereits erörterten Regeln der Werth der Unbekannten gefunden, so ergeben sich die Werthe aller übrigen Unbekannten leicht durch Substitution.

§. 219.

Erkl. 1. Um aus gegebenen Gleichungen nach und nach alle Unbekannten bis auf eine zu eliminiren, oder die Anzahl der gegebenen Gleichungen auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurückzuführen, gibt es verschiedene Methoden. Diese sind:

a) die Substitution, welche sich auf den Grundsatz stützt: „Gleiches für Gleiches gesetzt gibt Gleiches“;

b) die Comparation (auch Combination), welche auf dem Grundsatze beruht: „Zwei Größen, deren jede derselben dritten gleich ist, sind es auch unter sich“;

c) die Conjunktion (auch englische, Additions- oder Koëffizientenmethode genannt), welche sich auf den Satz gründet: „Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches“;

d) die französische oder Bézout'sche Methode, die auf dem Satze beruht: „Ist ein Faktor eines Produktes Null, so ist auch das Produkt Null."

2. Jene mittelst Anwendung dieser Methoden sich ergebenden Gleichungen, welche jedesmal eine der vorhin vorhandenen Unbekannten nicht mehr enthalten, werden Eliminationsgleichungen genannt.

§. 220.

Erkl. Die allgemeine Form für geordnete Gleichungen

1. mit zwei Unbekannten ist:

1) $ax + by = c$,

2) $mx + ny = p$;

2. mit drei unbekannten Größen:

1) $ax + by + cz = d$,

2) $fx + gy + hz = k$,

3) $mx + ny + pz = q$.

Anm. In Gleichungen mit zwei Unbekannten kann auch eines der bekannten Glieder (c oder p) $= 0$ sein. Die Gleichungen mit drei und mehrern Unbekannten können unter verschiedenen Formen erscheinen, indem nicht alle Unbekannten in jeder Gleichung vorkommen müssen, d. i. einzelne der bekannten Größen $= 0$ sein können.

§. 221.

Aufg. Gleichungen mit zwei Unbekannten mittelst der Substitutionsmethode aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man löse eine der beiden geordneten Gleichungen für eine Unbekannte (ohne Rücksicht auf die andere Unbekannte) auf, und setze ihren Werth in die andere Gleichung; so erhält man eine dritte Gleichung, in der nur noch eine Unbekannte vorkommt (A. E. VI. 4.). Hat man demnach die Gleichungen:

1) $ax + by = c$ und

2) $mx + ny = p$; so folgt aus 1):

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Substituirt man diesen Werth von y in 2), so erhält man die Eliminationsgleichung

$$3)\quad mx + \frac{n(c - ax)}{b} = p,$$

aus welcher sich durch Entfernung des Bruches und Auflösung der Klammern ergibt:

$$bmx + cn - anx = bp\ , \text{ oder}$$
$$bmx - anx = bp - cn\ , \text{ oder}$$
$$(bm - an)\,x = bp - cn\ ; \text{ also}$$
$$x = \frac{bp - cn}{bm - an} = \frac{cn - bp}{an - bm} \text{ (§. 95, Zus.)}.$$

Um nun y zu finden, kann man entweder den für x gefundenen Werth in eine der beiden gegebenen Gleichungen, oder in den bereits für y aus 1) aufgestellten Werth substituiren. Wir erhalten in beiden Fällen

$$y = \frac{cm - ap}{bm - an} = \frac{ap - cm}{an - bm}.$$

Man habe z. B. x und y aus folgenden numerischen Gleichungen zu bestimmen:

$$1)\quad 4x + 3y = 29 \text{ und}$$
$$2)\quad 5x - 2y = 19. \text{ Aus 1) ergibt sich}$$
$$y = \frac{29 - 4x}{3}.$$

Substituirt man diesen Werth in 2), so erhält man die Eliminationsgleichung:

$$3)\quad 5x - \frac{2(29 - 4x)}{3} = 19\ ; \text{ hieraus}$$
$$15x - 58 + 8x = 57\ , \text{ oder}$$
$$23x = 115\ ; \text{ also}$$
$$x = 5\ .$$

Da nun $y = \frac{1}{3}(29 - 4x)$; so wird durch Substitution des Werthes von x:

$$y = \tfrac{1}{3}(29 - 4.5) = 3.$$

§. 222.

Aufg. Gleichungen mit zwei Unbekannten mittelst der **Comparationsmethode** aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man löse jede der geordneten Gleichungen für ein und dieselbe Unbekannte auf, und setze die erhaltenen Werthe einander gleich. Denn ist

$$1)\quad ax + by = c\,,\ \text{und}$$
$$2)\quad mx + ny = p\,;\ \text{so folgt aus}$$

$$1)\quad y = \frac{c - ax}{b}\,,\ \text{und aus}\ 2)\quad y = \frac{p - mx}{n}\,;$$

daher wird $3)\quad \dfrac{c - ax}{b} = \dfrac{p - mx}{n}$, (A. E. VI. 5.)

aus welcher $cn - anx = bp - bmx$, oder

$$(bm - an)x = bp - cn\,;\ \text{also}$$

$$x = \frac{bp - cn}{bm - an} = \frac{cn - bp}{an - bm}\ \text{folgt.}$$

Die andere Unbekannte y ergibt sich wie oben (§. 221.)

Man habe z. B. $1)\quad 2x + 3y = 18$,

$2)\quad 5x - 7y = 16$; so folgt aus

$$1)\quad y = \frac{18 - 2x}{3}\,,\ \text{aus}\ 2)\quad y = \frac{5x - 16}{7}\,;\ \text{daher}$$

$$3)\quad \frac{18 - 2x}{3} = \frac{5x - 16}{7}\,.$$

Hieraus findet sich $x = 6$, dann $y = 2$.

§. 223.

Aufg. Gleichungen mit zwei Unbekannten durch die Conjunktionsmethode aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man suche die geordneten Gleichungen so durch Addition zu verbinden, daß eine der beiden Unbekannten wegfällt.

Zu diesem Behufe ist aber nothwendig, daß die zu eliminirende Unbekannte in beiden Gleichungen a) denselben Koëffizienten, aber b) mit entgegengesetzten Zeichen habe. Beide Bedingungen sind (nach §. 208, Lehrs. und Zus. 3.) leicht zu erfüllen.

Um der erstern zu genügen nehme man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Koëffizienten jener Unbekannten, die man eliminiren will, dividire mit jedem in dieses Vielfache, und multiplizire mit dem Quotus die betreffende Gleichung. Denn ist

$$1)\ ax + by = c\ ,\ \text{und}$$
$$2)\ mx + ny = p\ ,$$

und man multiplizirt, um y zu eliminiren, die Gleichung 1) mit n, und 2) mit b, (da bn der kleinste Dividuus der Koëffizienten von y ist), so erhält man

$$\text{aus } 1)\ anx + bny = cn\ ,\ \text{und}$$
$$\text{aus } 2)\ bmx + bny = bp\ .$$

Wechselt man in letzterer Gleichung die Zeichen, und addirt sie dann zu erstern, so wird

$$3)\ (an - bm)x = cn - bp\ ;\ \text{also}$$
$$x = \frac{cn - bp}{an - bm} = \frac{bp - cn}{bm - an}\ .$$

Substituirt man diesen Werth von x in 1) oder 2), so ergibt sich der Werth von y. Diesen erhält man auch (was oft bequemer ist), wenn man obiges Verfahren noch einmal anwendet, und x eliminirt, indem man 1) mit m, und 2) mit a multiplizirt.

Man habe z. B. $1)\ 5x + 6y = 82\ ,$
$2)\ 7x - 4y = 28\ .$

Multipliziren wir, um y zu eliminiren, die Gleichung 1) mit 2, und die Gleichung 2) mit 3, so wird

$$1)\ 10x + 12y = 164\ ,\ \text{und}$$
$$2)\ 21x - 12y = 84\ ,\ \text{daher}$$
$$3)\ 31x = 248\ ;\ \text{also}$$
$$x = 8\ .$$

Der Werth von x in die Gleichung 1) substituirt verwandelt dieselbe in:

$$40 + 6y = 82\ ;\ \text{also ist}$$
$$6y = 82 - 40 = 42\ ,\ \text{und daher } y = 7.$$

§. 224.

Aufg. Gleichungen mit zwei Unbekannten mittelst der französischen Methode aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man multiplizire eine der beiden geordneten Gleichungen mit einer willkührlichen allgemeinen Zahl, und verbinde die so erhaltene Gleichung und die andere (unveränderte) durch Addition oder Subtraktion. Dann setze man den Koëffizienten jener Unbekannten, die man eliminiren will, = 0, be-

stimme aus dieser (annullirten) Gleichung den Werth der willkührlichen Zahl, und setze ihn statt derselben in die Eliminationsgleichung; so erhält man nach gehöriger Reduktion den Werth einer Unbekannten. Denn ist

$$1)\quad ax + by = c\ ,$$
$$2)\quad mx + ny = p\ ,$$

und man multiplizirt z. B. 1) mit der beliebigen Zahl k, so geht sie über in

$$akx + bky = ck\ ;\ \text{davon}$$
$$mx + ny = p\ \text{subtrahirt, gibt}$$
$$3)\quad (ak - m)x + (bk - n)y = ck - p\ .$$

Wollen wir nun aus 3) den Werth von x suchen, so eliminiren wir y, indem wir seinen Koëffizienten

$$bk - n = 0 \text{ setzen, aus welcher Gleichung}$$
$$k = \frac{n}{b} \text{ folgt}\ .$$

Substituirt man diesen Werth von k in 3), so wird

$$\left(\frac{an}{b} - m\right)x = \frac{cn}{b} - p\ ,\ \text{oder}$$
$$(an - bm)x = cn - bp\ ;\ \text{also wieder}$$
$$x = \frac{cn - bp}{an - bm} = \frac{bp - cn}{bm - an}\ .$$

Setzt man den Koëffizienten von x, nämlich $ak - m = 0$, also $k = \frac{m}{a}$, und substituirt diesen Werth in 3), so wird

$$y = \frac{cm - ap}{bm - an} = \frac{ap - cm}{an - bm}\ .$$

Man habe z. B. 1) $7x + 8y = 126$,
2) $4x - 3y = 19$.

Multiplizieren wir 2) mit k, und addiren die erhaltene Gleichung zu 1), so erhalten wir

$$3)\quad (7 + 4k)x + (8 - 3k)y = 126 + 19k\ .$$

Setzt man nun $8 - 3k = 0$, also $k = \frac{8}{3}$, so wird

$$\left(7 + 4.\frac{8}{3}\right)x = 126 + 19.\frac{8}{3}\ ,\ \text{oder}$$

$$(21 + 32)x = 378 + 152\ ,$$
$$53x = 530\ ;\ \text{alſo}$$
$$x = 10\ .$$

Der Werth von y ergibt ſich am leichteſten durch Subſtitution des Werthes von x in 1) oder 2). Man findet $y = 7$.

Anm. Welche von dieſen Methoden in beſondern Fällen am ſchnellſten und ſicherſten zum Ziele führe, muß durch Uebung und Aufmerkſamkeit erlernt werden. Im Allgemeinen dürfte die Conjunktionsmethode den Vorzug haben, da ſich bei ihr die Verbindungen der Zahlen am leichteſten überſehen laſſen, und manchmal das Multipliziren großer Zahlen umgangen werden kann. Erhält beim Ordnen eine der Gleichungen die Form $ax \pm by = 0$, ſo iſt meiſtens die Subſtitution am bequemſten.

Zuſ. Kommen in Gleichungen mit zwei Unbekannten dieſe als Nenner von Brüchen vor, haben alſo dieſelben die Form:

$$1)\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c\ ,\ \text{und}\ \ 2)\ \frac{m}{x} + \frac{n}{y} = p\ ,$$

ſo laſſen ſie ſich zwar auf dem gewöhnlichen Wege auflöſen; aber am einfachſten gelangt man zum Ziele, wenn man die Unbekannten im Nenner läßt, die Gleichungen auf gleiche Zähler bringt und ſie ſo mittelſt der Conjunktionsmethode auflöſt. Denn multiplizirt man 1) mit n, und 2) mit b, ſo folgt

$$1)\ \frac{an}{x} + \frac{bn}{y} = cn\ \ \text{und}$$
$$2)\ \frac{bm}{x} + \frac{bn}{y} = bp\ ;\ \text{daher durch Subtraktion}$$
$$3)\ \frac{an - bm}{x} = cn - bp\ ;\ \text{alſo}$$
$$an - bm = (cn - bp)x\ ;\ \text{mithin}$$
$$x = \frac{an - bm}{cn - bp}\ .$$

Anm. Gleichungen, welche auf dieſe Art am leichteſten gelöst werden, ſind auch jene, die unter folgenden Formen vorkommen:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{ax + by}{xy} = c \\ \dfrac{mx + ny}{xy} = p \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{axy}{bx + cy} = d \\ \dfrac{mxy}{nx + py} = q. \end{array}\right.$$

§. 225.

Aufg. Einfache Gleichungen mit drei Unbekannten aufzulösen.

Aufl. Man bringe die gegebenen Gleichungen, deren Anzahl für bestimmte Werthe der Unbekannten drei sein muß, auf die allgemeine Form:

$$1)\quad ax + by + cz = d\,,$$
$$2)\quad fx + gy + hz = k\,,$$
$$3)\quad mx + ny + pz = q\,;$$

eliminire sodann eine der Unbekannten (etwa z) zweimal zwischen irgend zweien der gegebenen Gleichungen, z. B. zwischen 1) und 2), dann zwischen 1) und 3), so ergeben sich zwei Eliminationsgleichungen, die z nicht mehr, sondern nur noch x und y enthalten; diese lassen sich dann auf die Form

$$4)\quad \alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{und}$$
$$5)\quad \mu x + \nu y = \varrho$$

bringen, und auf die bereits bekannte Art auflösen. Setzt man dann die für x und y gefundenen Werthe in eine der geordneten Gleichungen, so erhält man den Werth von z.

Zur Erläuterung des Gesagten sollen die Gleichungen:

$$1)\quad 3x + 2y + 5z = 32\,,$$
$$2)\quad 5x - 3y + 10z = 41\,, \quad \text{und}$$
$$3)\quad 20x + 11y - 15z = 13$$

nach allen vier Methoden aufgelöst werden.

I. **Substitution.** Löst man die Gleichung 1) für z auf, so wird $z = \frac{32 - 3x - 2y}{5}$. Dieser Werth in die beiden andern Gleichungen substituirt gibt die Eliminationsgleichungen

$$a)\quad 5x - 3y + \frac{10(32 - 3x - 2y)}{5} = 41\,,$$

$$b)\quad 20x + 11y - \frac{15(32 - 3x - 2y)}{5} = 13\,.$$

Ordnet man diese, so erhält man aus a)

$$4)\quad x + 7y = 23\,, \quad \text{und aus b)}$$
$$5)\quad 29x + 17y = 109\,.$$

Aus der Gleichung 4) ist ferner $x = 23 - 7y$; dieser Werth in 5) gesetzt gibt

$$6)\quad 29(23 - 7y) + 17y = 109\,, \text{ oder}$$
$$667 - 203y + 17y = 109\,;$$

hieraus folgt durch Transposition, Reduktion und Zeichenänderung:

$$186y = 558\,; \text{ also}$$
$$y = 3\text{ *)}\,.$$

Ferner wird $x = 23 - 7.3 = 2$; endlich $z = \frac{1}{5}(32 - 3.2 - 2.3) = \frac{1}{5}.20 = 4$.

II. Comparation. Lösen wir alle drei Gleichungen für z auf, so wird beziehungsweise aus 1), 2) und 3)

$$z = \frac{32 - 3x - 2y}{5}\,,$$
$$= \frac{41 - 5x + 3y}{10}\,,$$
$$= \frac{20x + 11y - 13}{15}\,.$$

Durch Comparation des ersten und zweiten, dann des ersten und dritten Werthes von z erhält man die Eliminationsgleichungen:

$$a)\quad \frac{32 - 3x - 2y}{5} = \frac{41 - 5x + 3y}{10}\,,$$
$$b)\quad \frac{32 - 3x - 2y}{5} = \frac{20x + 11y - 13}{15}\,,$$

aus denen sich dieselben geordneten Gleichungen

$$4)\quad x + 7y = 23\,, \text{ und}$$
$$5)\quad 29x + 17y = 109 \text{ wie oben ergeben.}$$

III. Conjunktion. Wird die Gleichung 1) mit 2 multiplizirt, so geht sie über in

$$6x + 4y + 10z = 64\,; \text{ hievon}$$
$$2)\quad 5x - 3y + 10z = 41 \text{ abgezogen, gibt}$$
$$4)\quad x + 7y = 23\,.$$

Durch Multiplikation von 1) mit 3 ergibt sich

*) Etwas einfacher gelangt man durch folgenden öfter anwendbaren Kunstgriff zum Ziele: Addirt man 4) und 5), so erhält man

$$30x + 24y = 132\,, \text{ oder, durch 6 dividirt,}$$
$$5x + 4y = 22\,; \text{ daher}$$
$$5(23 - 7y) + 4y = 22 \text{ ꝛc.}$$

$$9x + 6y + 15z = 96 \text{ ; dazu}$$
$$3)\ 20x + 11y - 15z = 13 \text{ addirt, erhält man}$$
$$5)\ 29x + 17y = 109 .$$

Wird die Gleichung 4) mit 29 multiplizirt, so verwandelt sie sich in

$$29x + 203y = 667 \text{ ; davon}$$
$$5)\ 29x + 17y = 109 \text{ subtrahirt, wird}$$
$$6)\ 186y = 558 \text{ ; also}$$
$$y = 3 .$$

Aus 4) ist $x = 23 - 7y = 23 - 7.3 = 2$. Endlich ist aus 1)

$$z = \tfrac{1}{5}(32 - 3x - 2y) = \tfrac{1}{5}(32 - 3.2 - 2.3)$$
$$= \tfrac{1}{5}(32 - 12) = \tfrac{1}{5}.20 = 4 .$$

Diese Methode hat den Vorzug, daß man die Eliminationsgleichungen bereits geordnet erhält.

IV. Franz. Methode. Man multiplizire zwei der geordneten Gleichungen, z. B. 1) und 2), mit zwei willkührlichen allgemeinen Zahlen α und β, und addire die erhaltenen Gleichungen zur gegebenen dritten. Dadurch erhält man

$$1)\ 3\alpha x + 2\alpha y + 5\alpha z = 32\alpha ,$$
$$2)\ 5\beta x - 3\beta y + 10\beta z = 41\beta$$
$$3)\ 20x + 11y - 15z = 13 \text{ ; dann}$$
$$4)\ (3\alpha + 5\beta + 20)x + (2\alpha - 3\beta + 11)y + (5\alpha + 10\beta - 15)z = 32\alpha + 41\beta + 13 .$$

Wollen wir nun zuerst y finden, so setzen wir die Koëffizienten von x und z gleich Null, also

$$3\alpha + 5\beta + 20 = 0 \text{, folglich a) } 3\alpha + 5\beta = -20 \text{, ebenso}$$
$$5\alpha + 10\beta - 15 = 0, \quad \text{„} \quad \text{b) } 5\alpha + 10\beta = 15 \text{ ;}$$

dadurch geht die Gleichung 4) über in

$$5)\ (2\alpha - 3\beta + 11)y = 32\alpha + 41\beta + 13 .$$

Aus den Gleichungen a) und b) findet man (α und β als Unbekannte betrachtet) $\alpha = -55$ und $\beta = 29$. Durch Substitution dieser Werthe in 5) wird

$$(-110 - 87 + 11)y = -32.55 + 41.29 + 13$$
$$(-197 + 11)y = -1760 + 1189 + 13$$
$$-186y = -1760 + 1202 = -558 \text{, oder}$$
$$186y = 558 \text{; also}$$
$$y = 3 .$$

Auf dieselbe Weise findet man x, wenn man die Koëffizienten von y und z, dann z, wenn man die von x und y gleich Null setzt; einfacher jedoch werden x und z erhalten, wenn man den für y gefundenen Werth in irgend zwei, z. B. 1) und 2) der gegebenen Gleichungen substituirt, wodurch man dann zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält, die sich leicht lösen lassen. Für den vorliegenden Fall werden diese Gleichungen:

α) $3x + 5z = 26$, und

β) $x + 2z = 10$.

Zus. Sollen mehr als drei Unbekannte aus ebenso vielen Gleichungen, als Unbekannte sind, gefunden werden, so geschieht dieß auf ganz ähnliche Weise. Man eliminirt nämlich, wenn man n Gleichungen mit n Unbekannten hat, aus allen eine Unbekannte, wodurch man (n — 1) Gleichungen für (n — 1) Unbekannte erhält; durch fernere Elimination einer Unbekannten ergeben sich (n — 2) Gleichungen für (n — 2) Unbekannte. Fährt man so fort, so wird am Ende noch eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden sein, welche sich leicht auflösen läßt. Man habe z. B. die Gleichungen:

1) $v + w + x + y + z = 2{\cdot}5$,

2) $v + 3w + 3x + 2y + z = 4{\cdot}5$,

3) $8v + 2w + x - y - 3z = 1$,

4) $5v - w + 9x - 5y - 2z = 2{\cdot}5$,

5) $v + 2w - 0{\cdot}5x + y - 4z = 0$.

Aus 1) folgt: $z = 2{\cdot}5 - (v + w + x + y)$. Substituirt man diesen Werth in die übrigen Gleichungen, so erhält man nach gehöriger Reduktion die Eliminationsgleichungen:

6) $2w + 2x + y = 2$,

7) $11v + 5w + 4x + 2y = 8{\cdot}5$,

8) $7v + w + 11x - 3y = 7{\cdot}5$,

9) $5v + 6w + 3{\cdot}5x + 5y = 10$.

Aus 6) ist wieder $y = 2(1 - w - x)$. Setzt man diesen Werth in die drei darauf folgenden Gleichungen, so wird nach gehöriger Reduktion:

10) $11v + w = 4{\cdot}5$,

11) $7v + 7w + 17x = 13{\cdot}5$,

12) $10v - 8w - 13x = 0$.

Aus der Gleichung 10) folgt: $w = 4{\cdot}5 - 11v$. Dieser Werth in 11) und 12) substituirt gibt die geordneten Gleichungen:

$$13)\quad 70v - 17x = 18\ ,$$

$$14)\quad 98v - 13x = 36\ .$$

Durch Subtraktion der Gleichung 13) von 14) erhält man:

$$28v + 4x = 18\ , \text{ oder}$$

$$7v + x = 4{\cdot}5\ ; \text{ also } x = 4{\cdot}5 - 7v\ .$$

Durch Substitution dieses Werthes von x in 14) wird endlich:

$$15)\quad 98v - 13(4{\cdot}5 - 7v) = 36\ , \text{ woraus}$$

$$v = 0{\cdot}5 \text{ folgt.}$$

Mittelst des Werthes von v ergibt sich nun leicht durch Substitution:

$x = 4{\cdot}5 - 3{\cdot}5 = 1$; $w = 4{\cdot}5 - 5{\cdot}5 = -1$; dann $y = 2$, und endlich $z = 0$.

Man löse dieses hier durch Substitution aufgelöste Beispiel auch nach den übrigen Methoden!

Anm. Gleichungen mit drei (oder mehrern) Unbekannten, welche die Form:

$$1)\quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = d\ ,$$

$$2)\quad \frac{f}{x} + \frac{g}{y} + \frac{h}{z} = k\ ,$$

$$3)\quad \frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = q$$

haben, oder sich auf dieselbe bringen lassen, werden nach §. 224, Zus. behandelt.

§. 226.

Aufgaben, deren Auflösung auf Gleichungen mit mehrern Unbekannten führt.

1) Welcher Bruch hat die Eigenschaft, daß sein Werth, wenn man den Zähler um die Zahl a vermehrt und den Nenner um eben diese Zahl vermindert, = m wird, dagegen, wenn man den Zähler um a vermindert und den Nenner um a vermehrt, sein reciproker Werth erscheint?

Gl. $1)\ \dfrac{x + a}{y - a} = m\ ,$ und $2)\ \dfrac{x - a}{y + a} = \dfrac{y}{x}\ ;$

Res. $x = \dfrac{a(2m + 1)}{m - 1}\ ,$ und $y = \dfrac{a(m + 2)}{m - 1}\ .$

Der Bruch ist daher $\frac{2m+1}{m+2}$.

2) Der n^{te} Theil einer zweizifferigen dekadischen Zahl übertrifft die Summe der beiden Ziffern um a Einheiten. Zieht man aber von der gedachten Zahl b Einheiten ab, so erhält man eine Zahl, welche dieselben Ziffern, aber in umgekehrter Ordnung, enthält. Welche Zahl ist es?

Gl. 1) $\frac{10x+y}{n} = x+y+a.$ | $x = \frac{b(n-1)-9an}{9(2n-11)}.$

2) $10x+y-b = 10y+x.$ | $y = \frac{b(10-n)-9an}{9(2n-11)}.$

Die gesuchte Zahl ist: $\frac{n(b-11a)}{2n-11}$.

3) Jemand hat zweierlei Weine. Mischt er a Maaß der bessern mit b Maaß der geringern Sorte, so hat jede Maaß der Mischung den Werth m. Nimmt er aber b Maaß der bessern und a Maaß der geringern Sorte, so hat die Maaß der Mischung nur den Werth n. Welchen Werth hat die Maaß des ungemischten Weines?

Gl. 1) $ax+by = m(a+b)$ | $x = \frac{am-bn}{a-b}.$

2) $bx+ay = n(a+b)$ | $y = \frac{an-bm}{a-b}.$

4) Man soll die Stärke zweier Heerden aus folgenden Daten bestimmen: Kommen a Stücke von der ersten zur zweiten, so sind beide gleich stark; gibt man aber a Stücke von der zweiten zur ersten, so ist diese n mal so stark als die zweite.

Gl. 1) $x-a = y+a,$ | $x = \frac{a(3n+1)}{n-1}.$

2) $x+a = n(y-a).$ | $y = \frac{a(n+3)}{n-1}.$

5) Von zweien Spielern, A und B, verliert im ersten Spiele A halb soviel, als B bei sich hat; im zweiten verliert B soviel, als A nach dem ersten Spiele noch hatte; im dritten Spiele gewinnt B n mal so viel, als ihm selbst im vorigen Spiele geblieben war; und es hat jetzt jeder a fl. Wie viel hatte jeder anfangs?

Gl. 1) $(n+1)(2y-x)=a$, | $x=\frac{a(4n+3)}{3(n+1)}$.

2) $2x-y-n(2y-x)=a$. | $y=\frac{a(2n+3)}{3(n+1)}$.

6) Ein Kapitalist A hat k fl. mehr, aber zu $\frac{1}{2}$ Proz. niedriger als B ausgeliehen, und bezieht doch jährlich m fl. mehr an Zinsen als B. Ein dritter C hat um $\frac{1}{2}$ k weniger, aber um 1 % höher als B ausgeliehen, und bezieht jährlich n fl. Zinsen weniger als A. Was hat B ausgeliehen, und zu welchen Prozenten?

Gl. 1) $\frac{(x+k)(y-0{\cdot}5)}{100}-m=\frac{xy}{100}$,

2) $\frac{(x+k)(y-0{\cdot}5)}{100}-n=\frac{(x-0{\cdot}5k)(y+1)}{100}$.

Res. $x=\frac{200(3m-2n)}{3}+k$; $y=\frac{200(3m-n)}{3k}+1$.

7) Man soll drei Zahlen finden von der Beschaffenheit, daß die erste nebst der Hälfte der zweiten und dritten; die zweite nebst dem dritten Theile der beiden andern; dann die dritte sammt dem vierten Theile der beiden erstern jedesmal derselben Zahl a gleich sei.

Gl. 1) $x+\frac{1}{2}(y+z)=a$, | $x=\frac{5a}{17}$

2) $y+\frac{1}{3}(x+z)=a$, | $y=\frac{11a}{17}$

3) $z+\frac{1}{4}(x+y)=a$. | $z=\frac{13a}{17}$

8) Zur Herstellung eines Gartens melden sich 3 Gärtner A, B und C. — A und B versprechen zusammen in a, A und C in b, B und C in c Tagen fertig zu werden. Um die ganze Arbeit schneller zu vollenden, nimmt der Eigenthümer alle drei auf. Wann wird jeder einzeln, wann alle drei zusammen fertig werden?

Gl. 1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$, | $x=\frac{2abc}{ac+bc-ab}$

2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}$, | $y=\frac{2abc}{ab+bc-ac}$

3) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}$. | $z=\frac{2abc}{ab+ac-bc}$.

Alle drei zusammen werden fertig in $\frac{2abc}{ab + ac + bc}$ Tagen.

9) Jemand hat drei Metallstufen, deren jede aus Gold, Silber und Kupfer legirt ist. Die erste enthält an Gold 2, an Silber 4, an Kupfer 8 Loth; die zweite an Gold 3, an Silber 9, an Kupfer 6 Loth; die dritte an Gold 10, an Silber 5, und an Kupfer 15 Loth. Er will sich ein Gefäß machen lassen, das an Gold a, an Silber b, an Kupfer c Loth enthalten soll; wie viele Loth sind von jeder Stange zu nehmen?

Gl. 1) $\frac{x}{7} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = a$,	$x = \frac{7}{11}(5c - 7a - b)$
2) $\frac{2x}{7} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = b$,	$y = \frac{6}{11}(2a + 5b - 3c)$
3) $\frac{4x}{7} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = c$.	$z = \frac{6}{11}(8a - 2b - c)$.

10) Die Steuern von 6 Dörfern sollen aus folgenden Angaben bestimmt werden: Wenn man von der Summe der Steuern aller übrigen Dörfer der Ordnung nach die Steuer des ersten, zweiten, dritten u. s. w. abzieht, so bleiben in derselben Ordnung die Reste a, b, c, d, e, f.

Gl. 1) $v + w + x + y + z - u = a$,
2) $u + w + x + y + z - v = b$,
3) $u + v + x + y + z - w = c$,
4) $u + v + w + y + z - x = d$,
5) $u + v + w + x + z - y = e$,
6) $u + v + w + x + y - z = f$.

Setzt man $\frac{1}{4}(a + b + c + d + e + f) = s$, so wird $u = \frac{1}{2}(s - a)$; $v = \frac{1}{2}(s - b)$; $w = \frac{1}{2}(s - c)$; $x = \frac{1}{2}(s - d)$; $y = \frac{1}{2}(s - e)$; $z = \frac{1}{2}(s - f)$.

II. Kap. Von den quadratischen Gleichungen.

A. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 227.

1. Eine quadratische oder eine Gleichung des zweiten Grades ist jene, in welcher, nachdem sie entwickelt ist, die Unbekannte in der zweiten, aber keiner höhern Potenz vorkommt.

2. Eine quadratische Gleichung nennt man

a) rein oder unvollständig, wenn die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt,

b) unrein, gemischt oder vollständig, wenn sie die Unbekannte in der zweiten und ersten Potenz enthält.

3. Jede reine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten kann mittelst der Transformationsgesetze auf die allgemeine Form $ax^2 = \pm c$, jede gemischte auf die Form $ax^2 \pm bx = \pm c$ gebracht werden, und heißt dann geordnet.

Zus. 1. Dividirt man obige Gleichungen durch a, so erhält man $x^2 = \pm \frac{c}{a}$, und $x^2 \pm \frac{bx}{a} = \pm \frac{c}{a}$. Da aber a, b und c gegebene Größen vorstellen, so sind auch die Quotienten derselben, d. i. $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ bekannt. Setzt man daher $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so wird I. $x^2 = \pm q$ und II. $x^2 \pm px = \pm q$.

Hat eine quadratische Gleichung eine dieser letztern Formen, so heißt sie auf die Grundform gebracht oder reduzirt.

Zus. 2. Jede auf die Grundform gebrachte reinquadratische Gleichung hat also nur zwei, jede gemischtquadratische drei Glieder, nämlich 1) das Quadrat der Unbekannten, positiv und ohne Koëffizienten, 2) die Unbekannte in der ersten Potenz mit einem Koëffizienten (der für die reinquadratische Gleichung $= 0$ wird), endlich 3) das Glied q, welches die Unbekannte nicht enthält, und auch das ledige, konstante oder Absolutglied genannt wird. Man nennt deßhalb eine geordnete reinquadratische Gleichung auch eine binomische, eine gemischtquadratische eine trinomische Gleichung.

§. 228.

Aufg. Eine reinquadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Man bringe dieselbe auf die Grundform $x^2 = \pm q$, und ziehe aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so erhält man für x zwei quantitativ gleiche, aber qualitativ entgegengesetzte Werthe. Denn aus der Gleichung $x^2 = \pm q$ folgt $x = \pm \sqrt{\pm q}$ (§. 171.). Z. B. es sei

$$0{\cdot}75x^2 + 3(x - 5)^2 = 3015 - 30x\text{, so folgt}$$
$$0{\cdot}75x^2 + 3x^2 - 30x + 75 = 3015 - 30x\text{, oder}$$
$$3{\cdot}75x^2 = 2940\text{, hieraus}$$
$$x^2 = 784\text{; also}$$
$$x = \pm\sqrt{784} = \pm 28 .$$

Zus. 1. Ist die Gleichung $x^2 = q$ (also das Absolutglied q positiv), so hat dieselbe jedenfalls zwei reelle Resultate; so ist z. B. in obigem Beispiele $x' = +28$ oder $x'' = -28$.

Ist $q = 0$, so fallen beide Resultate in eines, nämlich $x = 0$ zusammen.

Ist aber $x^2 = -q$, also q negativ, so wird x imaginär, nämlich $x = \pm\sqrt{-q} = \pm\sqrt{q}\,.\,\sqrt{-1}$, d. h. es gibt weder eine positive noch eine negative Zahl, sondern nur eine Zahlform (vgl. §. 172.), welche der Gleichung genügt. Hat man z. B. $x^2 + 25 = 0$, also $x^2 = -25$, so wird $x = \pm 5\sqrt{-1}$; es genügen somit der Gleichung nur die Zahlformen $\pm 5\sqrt{-1}$.

Zus. 2. Jede reine höhere Gleichung kann auf die allgemeine Form $x^n = \pm q$ gebracht werden, und wird also aufgelöst, wenn man aus beiden Seiten die n^{te} Wurzel auszieht.

Ist nun n eine gerade Zahl, und q positiv, so ist $x = \pm\sqrt[n]{q}$; ist aber q negativ, so hat die Gleichung kein mögliches Resultat. Ist n ungerade, so hat die Gleichung jedenfalls ein mögliches Resultat, dessen Zeichen sich nach dem von q richtet (§. 171, III.).

Z. B. aus der Gleichung:

$$15x^6 - 5832 = 7x^6 \text{ folgt}$$
$$8x^6 = 5832\text{, oder}$$
$$x^6 = 729\text{; also } x = \sqrt[6]{729} = \pm 3 .$$

Anm. Wenn in der Gleichung $x = \sqrt[n]{q}$ entweder q keine vollkommene Potenz des n^{ten} Grades, oder n größer als 3 oder eine gebrochene Zahl ist, so wendet man am bequemsten §. 199. an.

§. ~~153.~~ 229

Aufg. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. Man bringe die gegebene Gleichung durch Trans=

formation auf die Grundform $x^2 \pm px = \pm q$, addire sodann zu beiden Seiten das Quadrat vom halben Koëffizienten des zweiten Gliedes, d. i. $(\frac{1}{2}p)^2$, reduzire auf der zweiten Seite, ziehe hierauf aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und bringe endlich das mit x noch durch „$\pm$“ verbundene Glied auf die zweite Seite; so erhält man

$$x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 \pm q} = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}\,.$$

Bew. Statt $x^2 \pm px = \pm q$ kann man offenbar auch schreiben: $x^2 \pm 2x.\frac{1}{2}p = \pm q$. Nun sieht man aber sogleich, daß der ersten Seite dieser Gleichung nur die zweite Potenz von $\frac{1}{2}p$ abgehe, damit sie ein vollkommenes Quadrat sei. Addirt man daher (damit die Gleichheit nicht gestört wird) zu beiden Seiten $(\frac{1}{2}p)^2$, so wird

$$x^2 \pm 2x.\tfrac{1}{2}p + (\tfrac{1}{2}p)^2 = (\tfrac{1}{2}p)^2 \pm q = \tfrac{1}{4}p^2 \pm q\text{, oder}$$

$$(x \pm \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}(p^2 \pm 4q)\text{; also,}$$

wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht,

$$x \pm \tfrac{1}{2}p = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}\text{, und daher}$$

$$x = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}\,.$$

Z. B. Aus der irrationalen Gleichung

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{44+x} \quad \text{(vgl. §. 212, III.)}$$

folgt durch Quadrirung

$$x + 4 + 2\sqrt{x^2 + 15x + 44} + x + 11 = 44 + x\text{, dann}$$

$$2\sqrt{x^2 + 15x + 44} = 29 - x\text{, ferner}$$

$$4(x^2 + 15x + 44) = 841 - 58x + x^2\text{, oder}$$

$$4x^2 + 60x + 176 = 841 - 58x + x^2\text{; also}$$

$$3x^2 + 118x = 665\,.$$

Wird diese Gleichung noch durch 3 dividirt, so ist die gegebene Gleichung auf die Grundform gebracht, und man hat

$$x^2 + \frac{118x}{3} = \frac{665}{3}\,.$$

Addirt man beiderseits das Quadrat von $\frac{1}{2}.\frac{118}{3} = \frac{59}{3}$, so wird

$$x^2 + \frac{118x}{3} + \left(\frac{59}{3}\right)^2 = \frac{3481}{9} + \frac{665}{3}\text{, oder}$$

$$\left(x + \frac{59}{3}\right)^2 = \frac{3481 + 1995}{9} = \frac{5476}{9}, \text{ also}$$

$$x + \frac{59}{3} = \pm\sqrt{\frac{5476}{9}} = \pm\frac{74}{3}; \text{ und daher}$$

$$x = \frac{-59 \pm 74}{3} = \begin{cases} 5 \\ -44\frac{1}{3} \end{cases} \text{ oder } \begin{matrix} x' = 5 \\ x'' = -44\frac{1}{3}. \end{matrix}$$

Man nennt diese Methode eine vollständige quadratische Gleichung aufzulösen, welche unmittelbar auf eine einfache Gleichung führt, die Complirungsmethode.

Zus. Die geordnete unreinquadratische Gleichung $x^2 \pm px = \pm q$ hat also zwei Resultate, nämlich:

$x' = \mp \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}$, und $x'' = \mp \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}$.

Diese sind entweder a) beide reell, wenn q positiv oder $p^2 > 4q$ ist, und zwar rational oder irrational, je nachdem $p^2 \pm 4q$ ein vollkommenes Quadrat ist, oder nicht, oder b) beide imaginär, wenn q negativ und $p^2 < 4q$ ist; oder c) sie fallen beide in eines zusammen, wenn $p^2 - 4q = 0$ ist; denn es wird dann $x = \mp \frac{1}{2}p \pm 0 = \mp \frac{1}{2}p$. Ist $q = 0$, so wird auch eines der Resultate 0.

Anm. Die beiden Resultate einer geordneten Gleichung genügen zwar dieser jedesmal, nicht aber immer der gegebenen Gleichung. So erhält man z. B. aus der Gleichung $3x = 4 + \sqrt{2x}$ die Resultate 2 und $\frac{8}{9}$, von denen aber nur 2 die Gleichung identisch macht. Das Resultat $\frac{8}{9}$ genügt der Gleichung $3x = 4 - \sqrt{2x}$. Der Grund liegt darin, daß beide auf dieselbe geordnete Gleichung $9x^2 - 26x = -16$ führen.

§. 230.

Aufg. Eine geordnete unreine quadratische Gleichung aufzulösen, ohne sie auf die Grundform zu bringen.

Aufl. Man multiplizire die auf die Form $ax^2 \pm bx = \pm c$ gebrachte Gleichung mit dem vierfachen Koëffizienten des ersten Gliedes (also mit 4a), addire zu beiden Seiten der dadurch erhaltenen Gleichung das Quadrat vom Koëffizienten des zweiten Gliedes der geordneten Gleichung (also b^2), ziehe dann aus beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so hat man eine einfache Gleichung, deren Auflösung keine Schwierigkeit hat.

Bew. Ist $ax^2 \pm bx = \pm c$, so ist auch

$$4a^2x^2 \pm 4abx = \pm 4ac\text{, ebenso}$$

$$4a^2x^2 \pm 4abx + b^2 = b^2 \pm 4ac\text{, oder}$$

$$(2ax \pm b)^2 = b^2 \pm 4ac\text{; also auch}$$

$$2ax \pm b = \pm \sqrt{b^2 \pm 4ac}\text{, woraus endlich}$$

$$x = \frac{\mp b \pm \sqrt{b^2 \pm 4ac}}{2a} \text{ folgt.}$$

Z. B. Durch Multiplikation mit $4 . 5 = 20$ verwandelt sich die Gleichung

$$5x^2 - 7x = 138 \text{ in}$$

$$100x^2 - 140x = 2760\text{; addirt man beiderseits}$$

$$7^2 = 49\text{, so wird}$$

$$100x^2 - 140x + 7^2 = 49 + 2760\text{, oder}$$

$$(10x - 7)^2 = 2809\text{, also}$$

$$10x - 7 = \pm \sqrt{2809} = \pm 53\text{, dann}$$

$$10x = 7 \pm 53 = \begin{cases} 60 \\ -46 \end{cases}\text{; folglich}$$

$$x = \begin{cases} 6 \\ -4{\cdot}6\text{.} \end{cases}$$

Zus. Ist in der Gleichung $ax^2 \pm bx = \pm c$ der Koëffizient b eine gerade Zahl, so genügt es, die Gleichung nur mit a zu multipliziren, und dann zu beiden Seiten das Quadrat der Hälfte von b, also $(\frac{1}{2} b)^2$ zu addiren. Hat man z. B.

$$7x^2 - 16x = 95\text{,}$$

so erhält man durch Multiplikation mit 7:

$$49x^2 - 112x = 665\text{,}$$

dazu beiderseits $8^2 = 64$ addirt, gibt

$$49x^2 - 112x + 8^2 = 64 + 665 = 729\text{; also}$$

$$7x - 8 = \pm 27\text{, und}$$

$$x = \frac{8 \pm 27}{7} = \begin{cases} 5 \\ -2\frac{5}{7}\text{.} \end{cases}$$

Anm. Mittelst dieser Auflösungsart lassen sich also in einer quadratischen Gleichung die Brüche vermeiden.

§. 231.

Lehrs. In einer reduzirten quadratischen Gleichung ist I. der Koëffizient des zweiten Gliedes gleich der Summe der Resul=

tate mit entgegengesetztem Zeichen, und II. das Absolutglied gleich dem Produkte der Wurzeln.

Dat. α und β Resultate von $x^2 + px + q = 0$.

Thes. I. $p = -(\alpha + \beta)$. — II. $q = \alpha . \beta$.

Bew. Löst man die gegebene Gleichung auf die gewöhnliche Weise auf, so erhält man entweder

$$x = -\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} = \alpha, \text{ oder}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} = \beta.$$

Durch Addition dieser Resultate ergibt sich unmittelbar $-p = \alpha + \beta$; also $p = -(\alpha + \beta)$.

Multiplizirt man dieselben mit einander, so erhält man

$$\tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{4}(p^2 - 4q) = q = \alpha . \beta.$$

Zus. 1. Sind die Resultate einer quadratischen Gleichung bekannt, so läßt sich dieselbe leicht in ihrer Grundform herstellen. Denn ist $x = \alpha$ und $x = \beta$; so hat man $x - \alpha = 0$ und $x - \beta = 0$, also auch $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$; ferner ist

$$\begin{aligned}(x - \alpha)(x - \beta) &= x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta, \text{ oder} \\ &= x^2 - (\alpha + \beta)\,x + \alpha\beta, \\ &= x^2 + px + q,\end{aligned}$$

indem $-(\alpha + \beta) = p$ und $\alpha\beta = q$ ist (Lehrs.).

Zus. 2. Jede quadratische Gleichung läßt sich vermöge Zus. 1. auch dadurch auflösen, daß man sie auf Null bringt, und als Trinom nach §. 81. behandelt.

Ebenso kann man umgekehrt die Auflösung quadratischer Gleichungen benützen, um ein Trinom von der Form $x^2 + px + q$ in ein Produkt von der Form $(x - \alpha)(x - \beta)$ zu verwandeln. Setzen wir z. B. $a^2 + 2ab - 35b^2 = 0$ (vgl. §. 81, Zus.), und betrachten a als Unbekannte dieser Gleichung, so findet man

$$a = \begin{cases} 5b \\ -7b \end{cases}; \text{ folglich ist}$$

$$a^2 + 2ab - 35b^2 = (a - 5b)(a + 7b).$$

Zus. 3. Wird eine quadratische Gleichung annullirt, so kann man aus den Zeichen der Glieder unmittelbar auf die der Resultate schließen, und zwar enthält sie soviele positive Resultate, als Zeichenwechsel, und soviele negative, als Zeichenfolgen vorhanden sind. Demnach hat die Gleichung $x^2 - px + q = 0$ zwei

positive, $x^2 + px + q = 0$ zwei negative, dagegen $x^2 \pm px - q = 0$ ein positives und ein negatives Resultat, wovon jenes numerisch das größere ist, welches das entgegengesetzte Zeichen von p hat.

§. 232.

Lehrs. Jede trinomische Gleichung, in welcher der Exponent der Unbekannten im ersten Gliede das Doppelte vom Exponenten derselben im zweiten Gliede ist, kann wie eine quadratische behandelt werden.

Dat. $x^{2n} \pm px^n = \pm q$.

Bew. Setzt man $x^n = y$, also $(x^n)^2 = x^{2n} = y^2$, so verwandelt sich obige Gleichung in die quadratische

$$y^2 \pm py = \pm q\,,\ \text{aus der man}$$
$$y = \mp \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}\ \text{erhält.}$$

Da aber $y = x^n$, so ist

$$x = \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\mp \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2 \pm 4q}}\,.$$

Z. B. es ist $\sqrt[3]{x^4} - 5\sqrt[3]{x^2} = -4$ einerlei mit

$$x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} = -4\,;\ \text{daher wird auch}$$
$$x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 2{\cdot}5^2 = 6{\cdot}25 - 4 = 2{\cdot}25;\ \text{also}$$
$$x^{\frac{2}{3}} - 2{\cdot}5 = \pm 1{\cdot}5\,,\ \text{mithin}$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 2{\cdot}5 \pm 1{\cdot}5 = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}.$$

Wir haben somit folgende zwei Gleichungen:

$$a)\ x^{\frac{2}{3}} = 4 \quad \text{und} \quad b)\ x^{\frac{2}{3}} = 1\,;$$

aus beiden folgt durch Erhebung zum Kubus:

$$x^2 = 64 \quad \text{und} \quad x^2 = 1\,;\ \text{also}$$
$$x = \pm 8 \quad \text{„} \quad x = \pm 1\,.$$

Zus. Mittelst dieses Satzes lassen sich manche irrationale Gleichungen auflösen, ohne daß man dieselben zuerst rational macht (manche können sogar nur auf diesem Wege als niedere Gleichungen gelöst werden). Hat man z. B.

1) $2x + 5\sqrt{x} = 52$ oder $2x + 5x^{\frac{1}{2}} = 52$,

so erhält man (nach §. 230):

$$16x + 40x^{\frac{1}{2}} = 416, \text{ dann}$$

$$16x + 40x^{\frac{1}{2}} + 5^2 = 25 + 416 = 441, \text{ oder}$$

$$(4\sqrt{x} + 5)^2 = 441, \text{ daher}$$

$$4\sqrt{x} + 5 = \pm 21, \text{ folglich}$$

$$4\sqrt{x} = -5 \pm 21 = \begin{cases} 16 \\ -26 \end{cases},$$

$$\sqrt{x} = \begin{cases} 4 \\ -6{\cdot}5 \end{cases}; \text{ also } x = \begin{cases} 16 \\ 42{\cdot}25 \end{cases}.$$

Als Beispiel einer irrationalen Gleichung, die sich nur dadurch als niedere auflösen läßt, indem man sie nicht rational macht, habe man

2) $2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 5 + 3x$.

Wir suchen den Radikand der Wurzelgröße noch einmal herzustellen, und erhalten zunächst durch Transposition von $3x$:

$$2x^2 - 3x - 3\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 5.$$

Zu beiden Seiten die Zahl 5 addirt, gibt

$$(2x^2 - 3x + 5) - 3\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 10.$$

Setzen wir nun $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} = y$, also

$2x^2 - 3x + 5 = y^2$, so verwandelt sich letztere Gleichung in $y^2 - 3y = 10$, aus der man leicht

$$y = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}, \text{ also } y^2 = \begin{cases} 25 \\ 4 \end{cases} \text{ findet.}$$

Somit erhalten wir die beiden Gleichungen:

a) $2x^2 - 3x + 5 = 25$ und b) $2x^2 - 3x + 5 = 4$, aus denen

$$x = \begin{cases} 4 \\ -2{\cdot}5 \end{cases}, \qquad x = \begin{cases} 1 \\ 0{\cdot}5 \end{cases} \text{ folgt.}$$

B. Quadratische Gleichungen mit mehrern Unbekannten.

§. 233.

Erkl. 1. Eine Gleichung mit zwei (oder mehrern) Unbekannten ist vom zweiten Grade, wenn sie (nachdem sie entwickelt ist) Glieder enthält, in denen die Unbekannten in der zweiten Potenz vorkommen, oder die Summe der Exponenten der Unbekannten zwei ist.

2. Um mehrere Unbekannte aus quadratischen Gleichungen zu bestimmen, müssen (wie bei den einfachen) ebensoviele von einander unabhängige Gleichungen bestehen, als Unbekannte vorhanden sind (vgl. §. 218.).

3. Die Auflösung solcher Gleichungen geschieht im Allgemeinen nach den §. 219. angegebenen Methoden, wo man jedoch bei der successiven Elimination der Unbekannten auf keine höhere Gleichung geführt werden darf, als eine quadratische, oder eine solche, die sich als quadratische behandeln läßt.

Anm. Bei quadratischen Gleichungen mit mehrern Unbekannten ist es häufig nicht vortheilhaft, unmittelbar den Werth einer Unbekannten zu suchen, sondern zuerst die Summe, Differenz oder das Produkt u. s. w. der Unbekannten, und aus diesen erst jene selbst zu entwickeln.

§. 234.

Aufg. Gleichungen des zweiten Grades mit zwei und mehrern Unbekannten aufzulösen.

Aufl. Wir unterscheiden hier in Bezug auf Gleichungen mit zwei Unbekannten folgende zwei Fälle:

I. Ist nur eine der gegebenen (oder geordneten) Gleichungen vom zweiten, die andere vom ersten Grade, so löse man die letztere für eine Unbekannte auf, und substituire ihren Werth in die andere Gleichung, dann erhält man eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten, für welche sich zwei Werthe ergeben. Setzt man diese nach einander in die einfache Gleichung ein, so findet man zu jedem den zugehörigen Werth für die eliminirte Unbekannte.

Hat man z. B. 1) $2x - 3y = 1$,

2) $4x^2 - 7y^2 = 37$, so erhält man aus

1) $y = \frac{2x - 1}{3}$. Dieser Werth in 2) substituirt gibt die Eliminationsgleichung

$$3)\ 4x^2 - 7 \cdot \left(\frac{2x - 1}{3}\right)^2 = 37\text{, oder}$$

$$4x^2 - \frac{7(4x^2 - 4x + 1)}{9} = 37\text{;}$$

aus dieser erhält man die geordnete Gleichung:

$2x^2 + 7x = 85$, aus der sich

$x' = 5$ oder $x'' = -8{\cdot}5$ findet.

Durch Substitution dieser Werthe von x ergibt sich ferner:

$y' = 3$ oder $y'' = -6$.

II. Sind beide Gleichungen vom zweiten Grade, oder eine vom ersten, die andere aber von einem höhern Grade, so wird man, wenn man auf dem gewöhnlichen Wege verfährt, häufig auf höhere Gleichungen geführt; jedoch lassen sich dieselben durch Anwendung gewisser Vortheile auf quadratische zurückführen. Solche Vortheile können natürlich nicht gelehrt, sondern müssen durch Nachdenken und Uebung erlernt werden. Einige spezielle Beispiele mögen genügen, als Anhaltspunkte zu dienen.

a) Man habe 1) $x^2 + y^2 = m$, und

2) $x + y = n$.

Da die Gleichung 2) vom ersten Grade ist, so kann man entweder nach Nr. I. verfahren, oder auf folgende Art:

Quadrirt man 2), so erhält man

$x^2 + 2xy + y^2 = n^2$; davon

1) $x^2 + y^2 = m$ abgezogen, gibt

3) $2xy = n^2 - m$.

Wird nun die Gleichung 3) von 1) subtrahirt, so ergibt sich:

$x^2 - 2xy + y^2 = 2m - n^2$, oder

$(x - y)^2 = 2m - n^2$; also

$$4)\ x - y = \pm \sqrt{2m - n^2}\,.$$ Es ist aber

$$2)\ x + y = n\,;$$ woraus

$$x = \tfrac{1}{2}(n \pm \sqrt{2m - n^2})\,,$$ und

$$y = \tfrac{1}{2}(n \mp \sqrt{2m - n^2})$$ folgt (vgl. §. 217, 2.).

In der Auflösung zeigt sich, daß die Werthe von x und y gegenseitig vertauscht werden können. Man nennt solche Gleichungen symmetrische*).

b) Es sei $1)\ xy + y = a\,,$

$2)\ xy + x = b\,.$

Durch Subtraktion der Gleichung 1) von 2) wird

$$3)\ x - y = b - a\,,\quad \text{also}\quad y = x + a - b\,.$$

Substituirt man diesen Werth von y in 2), so erhält man:

$$4)\ x(x + a - b) + x = b\,,$$ woraus leicht

$$x = \tfrac{1}{2}(b - a - 1) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 2(a+b) + 1}\,,$$ und

$$y = \tfrac{1}{2}(a - b - 1) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 2(a+b) + 1}$$ gefunden wird.

c) Es sei $1)\ x^3 + y^3 = a\,,$ und

$2)\quad xy \quad = m\,.$

Die Gleichung 1) gibt zum Quadrate erhoben:

$$x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = a^2\,.$$

Zieht man von dieser den vierfachen Kubus von 2), nämlich $4x^3y^3 = 4m^3$ ab, so erhält man

$$3)\ x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = a^2 - 4m^3\,,$$ oder

$$(x^3 - y^3)^2 = a^2 - 4m^3\,;$$ also

$$4)\ x^3 - y^3 = \pm \sqrt{a^2 - 4m^3}\,.$$ Es ist aber

$$1)\ x^3 + y^3 = a\,;$$ somit

$$\left.\begin{matrix} x^3 \\ y^3 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4m^3})\,,$$ also

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 4m^3})}\,.$$

Man löse dieses Beispiel auch dadurch, daß man den Werth von y aus 2) in 1) substituirt.

*) Der Grund für die Vertauschung der Werthe von x und y liegt darin, daß $(x - y)^2 = (y - x)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ist.

d) Man habe 1) $x^3 + y^3 = a$,

2) $xy(x + y) = m$.

Aus 2) folgt $x^2y + xy^2 = m$, also auch

$3x^2y + 3xy^2 = 3m$.

Diese Gleichung zu 1) addirt, gibt

3) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = a + 3m$, oder

$(x + y)^3 = a + 3m$; also

4) $x + y = \sqrt[3]{a + 3m} = \alpha$,

wenn der Kürze wegen der Werth der Wurzelgröße, also α) $x + y = \alpha$ gesetzt wird. Substituirt man zugleich diesen Werth in 2), so erhält man β) $xy = m : \alpha$.

Die Gleichungen α) und β) lassen sich nun entweder nach Nr. I. auflösen, oder auf folgende Art:

Aus α) wird $x^2 + 2xy + y^2 = \alpha^2$,

aus β) $\quad 4xy = \frac{4m}{\alpha}$; dieses abgezogen, gibt

$$x^2 - 2xy + y^2 = \alpha^2 - \frac{4m}{\alpha}, \text{ oder}$$

$$(x - y)^2 = \frac{\alpha^3 - 4m}{\alpha} = \frac{a - m}{\alpha}; \text{ mithin}$$

$$\gamma)\ x - y = \pm\sqrt{\frac{a - m}{\alpha}}.$$

Aus den Gleichungen α) und γ) finden sich nun leicht x und y.

e) Es sei 1) $x^2 + y^2 = a$,

2) $x + y = \frac{xy}{n}$.

Aus 2) folgt $n(x + y) = xy$, daher auch

$2xy = 2n(x + y)$.

Addirt man diese Gleichung zu 1), so wird

3) $x^2 + 2xy + y^2 = a + 2n(x + y)$, oder

$(x + y)^2 - 2n(x + y) = a$. Hieraus folgt

4) $x + y = n \pm \sqrt{n^2 + a}$, daher auch, vermöge 2),

5) $xy = n(n \pm \sqrt{n^2 + a})$,

welche Gleichungen sich leicht nach **d)** auflösen lassen.

f) Man habe 1) $(x^2 + y^2)(x + y) = a$,
2) $(x^2 - y^2)(x - y) = b$.

Vollzieht man die Multiplikation, so wird

$$1)\quad x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a ,$$
$$2)\quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = b .$$

Diese beiden Gleichungen geben zu einander addirt:

$$3)\quad x^3 + y^3 = \tfrac{1}{2}(a + b) .$$

Durch Subtraktion der Gleichung 2) von 1) erhält man:

$$4)\quad x^2y + xy^2 = xy(x + y) = \tfrac{1}{2}(a - b) .$$

Die Gleichungen 3) und 4) werden wie in **d)** gelöst.

g) Es sei gegeben 1) $(x^2 - y^2)(x - y) = axy$,
2) $(x^4 - y^4)(x^2 - y^2) = bx^2y^2$.

Dividirt man die Gleichung 2) durch die Gleichung 1), so wird

$$3)\quad (x^2 + y^2)(x + y) = \frac{bxy}{a} ;$$

ferner folgt durch Auflösung der Klammern

$$\text{aus } 3)\quad x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{bxy}{a} ,$$
$$\text{„ } 1)\quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = axy .$$

Werden diese Gleichungen zuerst addirt, dann die letztere von der erstern subtrahirt, so erhält man daraus

$$4)\quad x^3 + y^3 = \frac{b + a^2}{2a} . xy ,$$

$$5)\quad x + y = \frac{b - a^2}{2a} .$$

Substituirt man aus 5) den Werth von y in 4), so findet man:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{b - a^2}{4a} . \left(1 \pm \frac{a}{\sqrt{2b - a^2}}\right) .$$

h) Man habe 1) $x^5 + y^5 = a$,
2) $x + y = s$.

Erhebt man 2) zur fünften Potenz und subtrahirt vom Resultate 1), so wird $5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 = s^5 - a$, oder $5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) = s^5 - a$; daher

$$3)\quad x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = \frac{s^5 - a}{5xy} .$$

Wird ferner 2) kubirt, und dann 3) abgezogen, so ergibt sich

$$4)\quad x^2y + xy^2 = s^3 - \frac{s^5 - a}{5xy}\text{, oder}$$

$$xy(x + y) = s^3 - \frac{s^5 - a}{5xy}\text{, oder,}$$

da $x + y = s$ ist,

$$sxy = s^3 - \frac{s^5 - a}{5xy}.$$

Aus dieser Gleichung folgt die transformirte

$$(xy)^2 - s^2xy = -\frac{s^5 - a}{5s},$$

welche sich wie eine quadratische behandeln läßt. Man findet

$$5)\quad xy = \tfrac{1}{2}\left(s^2 \pm \sqrt{\frac{4a + s^5}{5s}}\right).$$

Die Gleichungen 2) und 5) lassen sich nun leicht nach Nr. I. oder **d)** auflösen.

i) Es sei 1) $x^2 + y^2 + z^2 = a$,
2) $x + y + z = b$,
3) $x(y + z) = c$.

Aus 3) ist $y + z = \frac{c}{x}$. Dieser Werth in 2) gesetzt, gibt die geordnete Gleichung:

$$4)\quad x^2 - bx = -c\text{, aus welcher}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(b \pm \sqrt{b^2 - 4c})\text{ wird.}$$

Substituirt man diesen für x gefundenen Werth in 1) und 2), so können diese Gleichungen auf die Form

$\alpha)$ $y^2 + z^2 = m$, und $\beta)$ $y + z = n$

gebracht werden, deren Lösung keine Schwierigkeit hat.

k) Man habe 1) $x(y + z) = a$,
2) $y(x + z) = b$,
3) $z(x + y) = c$.

Löst man die Klammern, so verwandeln sich die gegebenen Gleichungen in folgende:

1) $xy + xz = a$,
2) $xy + yz = b$,
3) $xz + yz = c$.

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man

$$4)\quad xy + xz + yz = \tfrac{1}{2}(a + b + c)\,.$$

Subtrahirt man hievon der Ordnung nach 3), 2) und 1), so ergibt sich:

$$5)\quad xy = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\,,$$

$$6)\quad xz = \tfrac{1}{2}(a + c - b)\,,$$

$$7)\quad yz = \tfrac{1}{2}(b + c - a)\,.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen 5), 6) und 7) wird

$$x^2y^2z^2 = \tfrac{1}{8}.(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)\,;$$ daher

$$8)\quad xyz = \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{2(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}\,.$$

Wird diese Gleichung der Ordnung nach durch die Gleichungen 7), 6), 5) dividirt, so erhält man die Werthe von x, y und z.

Anhang. Von der Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom.

Erkl. 1. Das Quadrat eines jeden Binoms besteht bekanntlich aus drei Gliedern (§. 142). Wird aber ein Binom quadrirt, von welchem eines oder beide Glieder irrationale Quadratwurzeln sind, so lassen sich zwei Glieder reduziren, und man erhält einen Ausdruck von der Form $a \pm \sqrt{b}$. Z. B.

$$1)\quad (3 \pm 2\sqrt{5})^2 = 9 \pm 12\sqrt{5} + 20 = 29 \pm 12\sqrt{5}\,;$$

$$2)\quad (2\sqrt{3} \pm 5\sqrt{2})^2 = 12 \pm 20\sqrt{6} + 50 = 62 \pm 20\sqrt{6}\,.$$

2. Soll nun umgekehrt zu einem solchen Quadrate die Wurzel gefunden oder untersucht werden, ob ein Ausdruck von der Form $a \pm \sqrt{b}$ ein Quadrat sei, so muß ein anderer Weg eingeschlagen werden, als der früher zum Behufe des Auffindens einer Quadratwurzel angegebene.

§. 235.

Aufg. Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom auszuziehen, wenn dasselbe ein Quadrat ist.

Aufl. Ist der gegebene Ausdruck $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, so erhält man die zu suchenden Wurzelglieder mittelst der Formel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}\,.$$

Bew. Durch Erhebung zum Quadrate wird

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-b}\text{, ebenso}$$

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = 2a - 2\sqrt{a^2-b}\text{; mithin ist}$$

$$1)\ \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})}\text{ und}$$

$$2)\ \sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\,.$$

Werden die Gleichungen 1) und 2) zuerst addirt, und dann 2) von 1) subtrahirt, so ergibt sich

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\text{ und}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a+\sqrt{a^2-b})} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}\text{;}$$

mithin wird allgemein, wenn man noch §. 158, Zus. 2. anwendet:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}\,.$$

Z. B. Man soll $\sqrt{70+30\sqrt{5}}$ bestimmen.

Es ist hier $a=70$, dann $\sqrt{b}=30\sqrt{5}$, also $b=900.5=4500$; ferner $a^2=4900$, folglich $a^2-b=4900-4500=400$, und daher $\sqrt{a^2-b}=\sqrt{400}=20$; somit

$$\sqrt{70+30\sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(70+20)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(70-20)}$$
$$= \sqrt{45}+\sqrt{25} = 3\sqrt{5}+5\text{; also}$$

$$\sqrt{70+30\sqrt{5}} = \pm(5+3\sqrt{5})\,.$$

Zus. Umgekehrt läßt sich die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln (mittelst §. 151, Zus. 3.) in eine verwandeln. Z. B.

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{4(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$$

III. Kap. Logarithmische und unbestimmte Gleichungen. Unmögliche Aufgaben.

A. Von den logarithmischen Gleichungen.

§. 236.

Erkl. 1. Logarithmische Gleichungen (im weitern Sinne) heißen jene, aus denen der Werth der Unbekannten mittelst der für Logarithmen bewiesenen Gesetze gefunden werden kann.

2. Die logarithmischen Gleichungen lassen sich eintheilen:

a) in logarithmische Gleichungen (im engern Sinne), in denen die Unbekannte nur im Logarithmand oder der Basis eines Logarithmus, nicht aber als Exponent vorkommt;

b) in Exponentialgleichungen, in welchen die Unbekannte als Exponent erscheint, die also zu den transcendenten gehören.

3. Die logarithmischen Gleichungen können von jeder der in §. 204. angegebenen Arten sein, nur müssen sie eine solche Beschaffenheit haben, daß sie sich auf algebraische zurückführen lassen, deren Lösung nach den bisher erklärten Gesetzen geschehen kann.

§. 237.

Aufg. Eine logarithmische Gleichung aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Nach Beschaffenheit der gegebenen Gleichung unterscheiden wir folgende Fälle:

I. Ist die Gleichung algebraisch, und gehört dieselbe nur zu den reinen höhern Gleichungen, oder kommt die Unbekannte in verwickeltern Ausdrücken mit verschiedenen Potenz- und Wurzelexponenten vor, so beruht die Auflösung auf §. 211. Das Verfahren selbst wird ein Beispiel hinreichend erläutern.

Man habe x aus $\sqrt[5]{(x^7 - 142{\cdot}52)^3} = 40$ zu bestimmen. Durch Logarithmirung erhält man

$$\tfrac{3}{5} \lg (x^7 - 142{\cdot}52) = \lg 40 = 1{\cdot}60206 \;; \text{ mithin}$$

$$\lg (x^7 - 142{\cdot}52) = \tfrac{5}{3} . 1{\cdot}60206 = 2{\cdot}67010 \,.$$

Wird jetzt beiderseits delogarithmirt, so ergibt sich

$$x^7 - 142{\cdot}52 = 467{\cdot}84 \;; \text{ daher}$$

$$x^7 = 610{\cdot}36 \,.$$

Hieraus folgt durch wiederholtes Logarithmiren:

$$7 \lg x = \lg 610{\cdot}36 = 2{\cdot}78558 \text{ , also}$$
$$\lg x = 0{\cdot}39794 \text{ ; und daher}$$
$$x = 2{\cdot}5 \text{ .}$$

II. Ist die Gleichung logarithmisch, enthält jedoch nur Logarithmen für ein System, so beruht die Lösung auf dem Gesetze, daß $g^x = a$ sein muß, wann $\overset{g}{\lg}\, a = x$ ist. Z. B. wenn

$$\overset{2+x}{\lg}\,(27 - \tfrac{2}{3}x) = 2 \text{ , so ist } (2+x)^2 = 27 - \tfrac{2}{3}x \text{ .}$$

Aus dieser folgt die reduzirte Gleichung:

$$x^2 + \tfrac{14}{3}x = 23 \text{ , und hieraus } x' = 3 \text{ und } x'' = -7\tfrac{2}{3} \text{ .}$$

III. Die Auflösung einer logarithmischen Gleichung, welche Logarithmen verschiedener Systeme enthält, beruht auf §. 185. Z. B. Es sei x aus $\overset{x+2}{\lg}\, 9 = \lg^{10} \frac{200 + 100x}{3}$ zu bestimmen. Da nach §. 185. $\frac{\overset{10}{\lg}\, 9}{\overset{10}{\lg}\,(x+2)} = \overset{x+2}{\lg}\, 9$ ist, so folgt durch Substitution

$$\frac{\lg 9}{\lg (x+2)} = \lg \frac{100(2+x)}{3} = \lg \frac{x+2}{0{\cdot}03} = \lg (x+2) - \lg 0{\cdot}03 \text{ .}$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch gehörige Transformation

$$(\lg (x+2))^2 - \lg 0{\cdot}03 \,.\, \lg (x+2) = \lg 9 \text{ oder}$$
$$(\lg (x+2))^2 + 1{\cdot}52288 \lg (x+2) = 0{\cdot}95424 \text{, woraus man}$$
$$\lg (x+2) = \begin{cases} 0{\cdot}47712 \\ -2 \end{cases} \text{ und } x = \begin{cases} 1 \\ -1{\cdot}99 \end{cases} \text{ findet.}$$

§. 238.

Aufg. Eine gegebene Exponentialgleichung aufzulösen.

Aufl. Man verfahre mit Rücksicht auf folgende Regeln:

I. Hat die gegebene Gleichung nur zwei Glieder, also die Form $ab^x = c$, so gehe man von der Verbindung der Zahlen auf die ihrer Logarithmen über, dann erhält man eine algebraische Gleichung. Denn aus $ab^x = c$ folgt:

$$\lg a + x \lg b = \lg c \text{ (§. 211.); hieraus}$$
$$x \lg b = \lg c - \lg a \text{ ; also}$$
$$x = \frac{\lg c - \lg a}{\lg b} \text{ .}$$

Man finde z. B. aus der Gleichung $a^x . b^{n-x} = c^{2x-n}$

$$x = \frac{n(\lg b + \lg c)}{\lg b + 2 \lg c - \lg a}.$$

II. Enthält die Gleichung mehr als zwei Glieder, so suche man dieselbe in eine binomische zu reduziren, indem man die vorkommenden zusammengesetzten Exponenten nach §. 45, Zus. oder §. 62, Zus. 1. aufhebt. Z. B. wenn

$$6.4^{x+1} - \tfrac{1}{2}.9^{x+1} = 3.4^x + \tfrac{1}{3}.9^{x+2}, \text{ so ist auch}$$
$$6.4.4^x - \tfrac{1}{2}.9.9^x = 3.4^x + \tfrac{1}{3}.81.9^x, \text{ oder}$$
$$24.4^x - 3.4^x = 27.9^x + 4{\cdot}5.9^x, \text{ d. i.}$$
$$21.4^x = 31{\cdot}5.9^x, \text{ woraus}$$
$$x = \frac{\lg 21 - \lg 31{\cdot}5}{\lg 9 - \lg 4} = \frac{-0{\cdot}17609}{0{\cdot}35218} = -0{\cdot}5 \text{ wird.}$$

Zus. 1. Bisweilen läßt sich eine mehrgliedrige Exponentialgleichung in eine zweigliedrige durch Auflösung des Dignands verwandeln, dessen Exponent die Unbekannte ist. Z. B. in der Gleichung $11.3^{2x} - 9^{x+1} = 6$ ist $9 = 3^2$, daher $9^{x+1} = 3^{2(x+1)} = 3^{2x+2} = 3^2.3^{2x} = 9.3^{2x}$, also erhalten wir

$$11.3^{2x} - 9.3^{2x} = 6, \text{ oder}$$
$$2.3^{2x} = 6, \text{ folglich}$$
$$3^{2x} = 3, \text{ und daher}$$
$$2x = 1, \text{ (§. 134, Zus. a).}$$

Zus. 2. In Bezug auf die allgemeine Gleichung $(\pm a)^x = \pm b$ ist a) die Auflösung für $(+a)^x = +b$ jedenfalls möglich, dagegen b) für $(+a)^x = -b$ stets unmöglich (§. 178, Zus. 2.).

Hat man aber die Gleichung $(-a)^x = \pm b$, so löse man sie ohne Rücksicht auf die Zeichen; findet man für x a) eine gerade Zahl, so ist die Lösung unmöglich, wenn $(-a)^x = -b$, und b) bei einer ungeraden, wenn $(-a)^x = +b$ gegeben ist (§. 140.). Z. B. aus der Gleichung $(-3{\cdot}58)^x = -2105{\cdot}15$ ergibt sich

$$x = \frac{\lg 2105{\cdot}15}{\lg 3{\cdot}58} = \frac{3{\cdot}32328}{0{\cdot}55388} = 6;$$

also die Auflösung unmöglich.

Anm. Eine logarithmische Gleichung, in der die Unbekannte zugleich als Dignand und Exponent vorkommt, läßt sich nicht auflösen, außer wenn zwei Gleichungen gegeben sind. Z. B. aus der Gleichung $x^{x+n} = a$ folgt $(n+x)\lg x = \lg a$,

welche, da x und lg x verschiedene unbekannte Zahlen sind, noch eine zweite Gleichung erfordert. Ist diese $x^{x-m} = b$, so findet man:

$$x = \frac{m \lg a + n \lg b}{\lg a - \lg b}.$$

§. 239.

Aufg. Den Werth der Unbekannten aus einer Exponentialgleichung von der Form $a^{2x} \pm p \,.\, a^x = \pm q$ zu finden.

Aufl. und Bew. Setzt man $a^x = y$, so geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$y^2 \pm py = \pm q,$$

aus der sich y (nach §. 229.) leicht finden läßt. Da nun $a^x = y$, so wird $x = \lg y : \lg a$.

Z. B. Es sei $5 \,.\, 7^{4x^2-2x-10} - 18 \,.\, 7^{2x^2-x-5} = 119$. Setzt man $7^{2x^2-x-5} = y$, so ergibt sich

$$5y^2 - 18y = 119, \text{ woraus}$$

$$y = \begin{cases} 7 \\ -3{\cdot}4 \end{cases} \text{ folgt.}$$

Wir haben somit die Gleichungen:

a) $7^{2x^2-x-5} = 7$; also (nach §. 134, Zus. a)

$$2x^2 - x - 5 = 1, \text{ woraus man}$$

$$x = \begin{cases} 2 \\ -1{\cdot}5 \end{cases} \text{ erhält;}$$

b) $7^{2x^2-x-5} = -3{\cdot}4$, aus der die Werthe von x unmöglich sind (§. 238, Zus. 2.).

Zus. Manchmal lassen sich Exponentialgleichungen, welche obige Form nicht haben, durch zweckmäßige Verwandlungen auf jene Form bringen. Z. B. aus der Gleichung

$$7 \,.\, 8^{2x^2+1} - 5 \,.\, 16^{3x^2-1} = 2304 \text{ folgt zunächst}$$

$$7 \,.\, 8^{2x^2} \,.\, 8 - \frac{5 \,.\, 16^{3x^2}}{16} = 2304, \text{ oder}$$

$$896 \,.\, 8^{2x^2} - 5 \,.\, 16^{3x^2} = 36864.$$

Nun ist aber $8 = 2^3$ und $16 = 2^4$, daher

$$8^{2x^2} = 2^{6x^2} \text{ und } 16^{3x^2} = 2^{12x^2}; \text{ mithin wird}$$

$$896 \,.\, 2^{6x^2} - 5 \,.\, 2^{12x^2} = 36864, \text{ oder}$$

$$5 . 2^{12x^2} - 896 . 2^{6x^2} = - 36864$$, aus welcher

$$2^{6x^2} = \begin{cases} 115 \cdot 2 \\ 64 \end{cases}$$ gefunden wird.

Wir haben somit die Gleichungen:

a) $2^{6x^2} = 115 \cdot 2$ und b) $2^{6x^2} = 64 = 2^6$, aus denen

$x = \pm 1 \cdot 0683 \ldots$, $x = \pm 1$ folgt.

Anm. Die logarithmischen Gleichungen finden vorzüglich bei den geometrischen Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnungen Anwendung, von denen später (§. 292 — 300.) gehandelt wird.

B. Von den unbestimmten Gleichungen.

§. 240.

Erkl. 1. Unbestimmte oder diophantische*) Gleichungen nennt man solche, bei welchen die Anzahl der Unbekannten die Anzahl der unter sich unabhängigen Gleichungen übersteigt; wenn z. B. für zwei Unbekannte nur eine Gleichung gegeben ist, oder sich formiren läßt. (Vgl. §. 218, 3.)

2. Jede einfache unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten kann auf die allgemeine Form: $ax + by = c$, mit drei Unbekannten auf die Form: $ax + by + cz = d$ gebracht werden.

3. Die Auflösung unbestimmter Gleichungen geschieht nach den bekannten Methoden (§. 219.); man eliminirt nämlich aus den gegebenen Gleichungen soviele Unbekannte als möglich, um eine Gleichung mit der möglichst geringen Anzahl von Unbekannten zu erhalten.

§. 241.

Erkl. 1. In einer unbestimmten Gleichung bleibt immer wenigstens eine Unbekannte der willkührlichen Annahme überlassen, und sie läßt daher stets eine unendliche Anzahl von Auflösungen zu. Denn aus der Gleichung $ax + by = c$ folgt, wenn man x bestimmen will, $ax = c - by$, oder $x = (c - by) : a$. Da nun y auch nicht gegeben ist, so nimmt man es willkührlich,

*) So genannt nach dem alexandrinischen Mathematiker Diophantus (wahrscheinlich 350 v. Chr.), den man für den Erfinder dieses Theiles der Algebra hält, über welche man auch von ihm das älteste Werk besitzt.

und es wird dann offenbar x jedesmal einen andern Werth erhalten, so oft der von y geändert wird.

2. Die unendliche Anzahl der Auflösungen unbestimmter Gleichungen werden gewöhnlich dadurch (sehr) eingeschränkt, daß man nur die Bedingungen aufsucht, unter welchen die Resultate ganze und positive Zahlen sind, also alle gebrochenen und negativen Werthe der Unbekannten, sowie auch Null ausschließt. — Bei quadratischen unbestimmten Gleichungen werden meistens nur die rationalen Resultate gesucht.

Eine so eingeschränkte diophantische Gleichung nennt man auch eine halbbestimmte.

Anm. Außer den oben angeführten Haupteinschränkungsbedingungen sind manchesmal noch andere Nebenbedingungen ausgesprochen, durch welche die Anzahl der möglichen Auflösungen noch mehr eingeschränkt wird, so daß oft nur eine einzige, bisweilen sogar keine Auflösung möglich ist. Solche sind z. B., wenn nur die kleinste Zahl einer gewissen Gattung, oder Zahlen von einer gegebenen Anzahl Ziffern verlangt, oder bestimmte Grenzen angegeben werden, zwischen denen sie liegen sollen, u. s. w.

§. 242.

Lehrs. Haben in der Gleichung $ax + by = c$ (in welcher a, b und c ganze Zahlen bezeichnen) die Koëffizienten a und b einen gemeinschaftlichen Divisor, durch welchen das bekannte Glied c nicht theilbar ist, so ist die Auflösung in ganzen Zahlen unmöglich.

Bew. Jeder Divisor von a und b ist auch ein Theiler von ax und by (§. 68, Zus. 2.), daher auch von $ax + by$ (§. 67.); es müßte also auch c durch jenen Divisor theilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht.

So ist z. B. $15x + 18y = 100$ nie in ganzen Zahlen zu lösen, da $15x + 18y = 3(5x + 6y)$ stets ein Vielfaches von 3 ist, also niemals $= 100$ werden kann.

Zus. Soll also die möglichst reduzirte Gleichung $ax + by = c$ in positiven ganzen Zahlen lösbar sein, so müssen a und b relative Primzahlen sein. Dieses vorausgesetzt ergeben sich in Hinsicht auf die Anzahl der Auflösungen folgende Fälle:

a) Hat die Gleichung die Form $ax + by = c$, woraus $ax = c - by$ folgt, so ist die Anzahl der Auflösungen stets begrenzt, indem $by < c$ sein muß, damit x positiv wird.

b) Ist $ax - by = c$, also $ax = c + by$, so ist die Anzahl der Auflösungen stets unendlich groß.

c) Ist $ax - by = -c$, folglich $ax = by - c$, so ist die Anzahl der Auflösungen unendlich, sobald $by > c$ wird.

§. 243.

Aufg. Eine unbestimmte Gleichung von der Form $ax \pm by = c$ für positive und ganze Werthe der Unbekannten aufzulösen.

Aufl. u. Bew. Wir unterscheiden hiebei zwei Fälle, nämlich I. ob c durch a oder b theilbar ist, oder II. ob dieses nicht der Fall ist. Das weitere Verfahren wird aus den angenommenen Beispielen klar werden.

I. Man löse die gegebene Gleichung für jene Unbekannte, durch deren Koëffizienten das bekannte Glied theilbar ist. Z. B. Es sei 1) $7x + 11y = 238$, so folgt

$$x = \frac{238 - 11y}{7} = 34 - \frac{11y}{7}.$$

Aus diesem Werthe von x ist nun leicht ersichtlich, daß, wenn x eine ganze Zahl sein soll, für y nur ein Werth angenommen werden darf, der ein Vielfaches von 7 ist. Setzen wir daher

$$y = 7m, \text{ so wird}$$
$$x = 34 - 11m.$$

Der Werth von m ist nun zwar im Allgemeinen ganz willkührlich, positiv, negativ oder Null; jedoch muß er so gewählt werden, daß x und y (der Bedingung gemäß) positive Zahlen werden. Setzen wir daher

	$m = 1$,	für	$m = 2$,	für	$m = 3$,
so wird	$y = 7$,	wird	$y = 14$,	ist	$y = 21$,
und	$x = 23$;	und	$x = 12$;	und	$x = 1$.

Für $m = 4$, oder allgemein für $m > 3$ würde der Werth von x negativ; also läßt die gegebene Gleichung nur obige drei Auflösungen zu. — Man habe

2) $19x + 15y = 195$, so wird

$$y = \frac{195 - 19x}{15} = 13 - \frac{19x}{15}.$$

Da nun y eine ganze Zahl werden soll, so muß es auch der letztere Bruch sein. Damit aber dieß der Fall ist, muß x irgend

ein Vielfaches von 15 sein. Setzt man daher $x = 15m$, so wird $y = 13 - 19m$.

Man mag nun für m was immer für eine ganze Zahl substituiren, so wird auch x und y eine solche werden, aber in jedem Falle wird eine von ihnen negativ; die gegebene Gleichung ist also für positive Werthe der Unbekannten gar nicht lösbar.

3) Aus $13x - 9y = 91$ folgt

$$x = \frac{91 + 9y}{13} = 7 + \frac{9y}{13}.$$

Setzt man wieder $y = 13m$, so wird

$$x = 7 + 9m.$$

Hier können für m offenbar alle Zahlen von 1 bis ∞ gesetzt werden, und die Gleichung läßt somit unendlich viele Auflösungen zu. Z. B. für $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$

wird $x = 16, 25, 34, 43, \ldots$

und $y = 13, 26, 39, 52, \ldots$

Man habe noch 4) $8x - 7y = -488$, so wird

$$x = \frac{7y - 488}{8} = \frac{7y}{8} - 61.$$

Setzt man wieder $y = 8m$, so wird

$$x = 7m - 61.$$

Da x positiv werden soll, so muß hier $7m > 61$, also $m > \frac{61}{7}$, d. i. $m > 8$ sein, dann ist die Anzahl der Auflösungen unendlich. Z. B. für $m = 9, 10, 11, \ldots$

wird $x = 2, 9, 16, \ldots$

und $y = 72, 80, 88, \ldots$

II. Ist das bekannte Glied c durch keinen der Koëffizienten a oder b theilbar, so löse man die Gleichung für jene Unbekannte auf, welche den kleinern Koëffizienten hat, und verfahre dann, wie in folgenden Beispielen gezeigt wird.

a) Man soll die Zahl 258 in zwei Summanden zerlegen, von denen der eine durch 17, der andere durch 11 theilbar ist.

Von den beiden Summanden muß der eine ein Vielfaches von 17, der andere von 11 sein; man erhält daher der Bedingung gemäß die Gleichung $17x + 11y = 258$, welche für y aufgelöst

$$1)\quad y = \frac{258 - 17x}{11} \text{ gibt.}$$

Da nun y eine ganze Zahl sein soll, so muß es auch sein Aequivalent sein; dividirt man durch 11 wirklich, so erhält man

$$y = 23 - x + \frac{5 - 6x}{11} = 23 - x - \frac{6x - 5}{11}.$$

Hier sind 23 und x ganze Zahlen; also muß auch der Bruch $\frac{6x - 5}{11}$ eine solche sein. Wir nehmen nun m als ganze Zahl, und setzen

$$\frac{6x - 5}{11} = m\,, \text{ so wird hieraus}$$

$$2)\quad x = \frac{11m + 5}{6} = m + \frac{5m + 5}{6} = m + 5 \,.\, \frac{m + 1}{6}.$$

Da der letztere Bruch wieder eine ganze Zahl sein muß (damit x eine solche wird), so setzen wir

$$\frac{m + 1}{6} = n\,, \text{ woraus}$$

$$3)\quad m = 6n - 1 \text{ folgt.}$$

Wir haben nun m unter der Form einer ganzen Zahl; substituiren wir den Werth von m aus 3) in 2), so ergibt sich

$$x = \frac{11(6n - 1) + 5}{6} = 11n - 1.$$

Dieser Werth von x in 1) substituirt, gibt

$$y = \frac{258 - 17(11n - 1)}{11} = 25 - 17n.$$

Wir haben somit die Bedingungsgleichungen:

$$a)\quad x = 11n - 1 \quad \text{und} \quad b)\quad y = 25 - 17n\,,$$

aus denen leicht ersichtlich ist, daß die Lösung nur möglich ist, wenn $n = 1$ gesetzt wird, und wir erhalten dann:

$$x = 10 \quad \text{und} \quad y = 8.$$

Die gesuchten Summanden sind somit $17 . 10 = 170$ und $11 . 8 = 88$.

b) Welche vierzifferigen Zahlen sind durch 63 theilbar, und geben durch 52 getheilt 10 als Rest?

Nennt man eine dieser Zahlen N, so muß der Aufgabe gemäß $N = 63x$, ebenso $N = 52y + 10$ sein (§. 214, Anm.).

Wir haben somit $63x = 52y + 10$, aus welcher Gleichung

$$y = \frac{63x - 10}{52} = x + \frac{11x - 10}{52}$$ folgt.

Setzt man $\frac{11x - 10}{52} = m$, so wird

$$1)\ x = \frac{52m + 10}{11} = 4m + \frac{8m + 10}{11} = 4m + 2 . \frac{4m + 5}{11}.$$

Der Bruch $\frac{4m + 5}{11} = n$ gesetzt, gibt

$$2)\ m = \frac{11n - 5}{4} = 2n - 1 + \frac{3n - 1}{4}.$$

Setzt man ferner den Bruch $\frac{3n - 1}{4} = p$, so wird

$$3)\ n = \frac{4p + 1}{3} = p + \frac{p + 1}{3}.$$

Endlich gibt $\frac{p + 1}{3} = q$ gesetzt,

$$4)\ p = 3q - 1.$$

Dieser Werth von p, welcher die Form einer ganzen Zahl hat, aus 4) in 3) substituirt, gibt

$$n = \frac{4(3q - 1) + 1}{3} = 4q - 1.$$

Durch Substitution dieses Werthes von n in 2) erhält man

$$m = \frac{11(4q - 1) - 5}{4} = 11q - 4.$$

Dieser Werth von m in 1) gesetzt, gibt

$$x = \frac{52(11q - 4) + 10}{11} = 52q - 18.$$

Da aber $N = 63x$, so erhält man durch Substitution

$$N = 63(52q - 18) = 3276q - 1134.$$

Setzt man nun der Ordnung nach $q = 1, 2, 3$, so erhält man beziehungsweise $N = 2142$, 5418 und 8694, als die drei (vermöge der Nebenbedingung) möglichen Auflösungen.

§. 244.

Aufg. Die Werthe von drei Unbekannten aus zwei Gleichungen in ganzen positiven Zahlen zu finden.

Aufl. I. Enthalten beide Gleichungen alle drei Unbekannten, so eliminire man eine derselben, und löse dann die erhaltene Eliminationsgleichung nach §. 243. auf. Z. B. Es sei

$$1)\quad 6x + 4y + z = 29$$
$$2)\quad 7x - 8y + 4z = 10 .$$

Aus 1) ist: $z = 29 - 6x - 4y$. Dieser Werth in 2) substituirt, gibt nach gehöriger Reduktion die Gleichung

$$3)\quad 17x + 24y = 106 .$$

Aus dieser findet man nach §. 243, II.:

$$y = 17p + 3 ,\ \text{und}\ x = 2 - 24p .$$

Durch Substitution dieser Werthe in 1) erhält man

$$z = 5 + 76p .$$

Da nun x, y und z positiv sein sollen, so darf nur $p = 0$ genommen werden, wodurch sich als einzige mögliche Lösung ergibt:

$$x = 2 ,\ y = 3\ \text{und}\ z = 5 .$$

II. Enthält jede der beiden Gleichungen nur je zwei Unbekannte, so suche man aus der einen Gleichung eine der Unbekannten unter der Form einer ganzen Zahl, und substituire das für sie gefundene Aequivalent in die andere Gleichung.

Z. B. Dividirt man eine um 1 vermehrte Jahreszahl durch 19, so heißt der bei der Division bleibende Rest die goldene Zahl; der Rest, den die um 9 vermehrte Jahreszahl bei der Division durch 28 läßt, heißt Sonnenzirkel, und der Rest, den die um 3 vermehrte Jahreszahl durch 15 getheilt übrig läßt, die Römer-Zinszahl. Welches Jahr unseres Jahrhunderts hat nun zur goldenen Zahl 19, zum Sonnenzirkel 22 und zur Römer-Zinszahl 4?

Nennt man die gesuchte Jahreszahl N, so muß b) $N + 1 = 19x + 19$; b) $N + 9 = 28y + 22$, und c) $N + 3 = 15z + 4$, also $N = 19x + 18 = 28y + 13 = 15z + 1$ sein.

Wir haben somit die Gleichungen:

$$1)\quad 19x + 18 = 28y + 13 ,\ \text{und}$$
$$2)\quad 28y + 13 = 15z + 1 .$$ — Aus 1) folgt

$$x = \frac{28y - 5}{19} = y + \frac{9y - 5}{19} = y + m ;\ \text{dann}$$

a) $y = \frac{19m + 5}{9} = 2m + \frac{m + 5}{9} = 2m + n$,

b) $m = 9n - 5$; also

$$y = \frac{19(9n - 5) + 5}{9} = 19n - 10 .$$

Dieser durch eine ganze Zahl ausgedrückte Werth von y in 2) substituirt, gibt

3) $28(19n - 10) + 13 = 15z + 1$, woraus

c) $z = \frac{532n - 268}{15} = 35n - 17 + \frac{7n - 13}{15}$ wird.

$\frac{7n - 13}{15} = p$ gesetzt, gibt

d) $n = \frac{15p + 13}{7} = 2p + 1 + \frac{p + 6}{7}$, woraus endlich

e) $p = 7q - 6$ folgt.

Durch Substitution des Werthes von q in d) erhält man

$$n = \frac{15(7q - 6) + 13}{7} = 15q - 11 \text{ , dann}$$

$$z = \frac{532(15q - 11) - 268}{15} \text{ , also}$$

$15z = 532(15q - 11) - 268 = 7980q - 6120$ *).

Nun ist aber $N = 15z + 1$; daher wird

$$N = 7980q - 6119 .$$

Setzt man nun $q = 1$, so ergibt sich $N = 1861$ als die gesuchte Jahreszahl.

§. 245.

Aufg. Die Werthe von drei Unbekannten in positiven ganzen Zahlen aus einer Gleichung zu finden.

Aufl. Man nehme für eine der Unbekannten (gleichgiltig welche) einen beliebigen Zahlenwerth, substituire diesen in die gegebene Gleichung, so erhält man eine Gleichung mit zwei Unbekannten, die dann nach §. 243. aufgelöst wird. Ist z. B.

$$5x + 7y + 3z = 39 ,$$

*) Von den in dieser Gleichung vorkommenden Zahlen 532 und 7980 ist erstere die dionysische, letztere die julianische Periode. Siehe meine Elemente der mathem. Geographie die Anmerkungen zu §. 61. und §. 63.

und man setzt zuerst $x = 1$, so geht die Gleichung über in

$$7y + 3z = 34,$$

aus welcher man auf die bereits bekannte Weise findet

$$y = 3m + 1 \text{ und } z = 9 - 7m.$$

Setzt man hier $m = 0, 1,$
so wird $y = 1, 4,$
und $z = 9, 2.$

Wird ferner $x = 2$ gesetzt, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in $7y + 3z = 29$, aus welcher man

$$y = 3n + 2 \text{ und } z = 5 - 7n \text{ findet.}$$

Hier ist nur eine einzige Auflösung für $n = 0$ möglich, wobei $y = 2$ und $z = 5$ wird.

Setzt man sodann $x = 3$, so wird $y = 3p$ und $z = 8 - 7p$; also $p = 1$ gesetzt, $y = 3$ und $z = 1$.

Wird ferner $x = 4$ angenommen, so erhält man $y = 3q + 1$ und $z = 4 - 7q$, folglich für $q = 0$ die einzige mögliche Lösung $y = 1$ und $z = 4$.

Für $x = 5$ ergibt sich $y = 2 - 3q$ und $z = 7q$; also keine Auflösung, ebenso für jeden Werth von x, der größer als 5 ist. Die Gleichung hat also nur folgende 5 Auflösungen:

$$x = 1, 1, 2, 3, 4.$$
$$y = 1, 4, 2, 3, 1.$$
$$z = 9, 2, 5, 1, 4.$$

Anm. Man nennt solche Gleichungen, deren Anzahl um mehr als eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der Unbekannten, mehr als unbestimmt.

§. 246.

Aufg. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades für ganze, positive oder wenigstens rationale Werthe der Unbekannten aufzulösen.

Aufl. Diese hat im Allgemeinen viel größere Schwierigkeit, und kann nicht nach einem bestimmten Gesetze geschehen; daher mögen am besten einige Beispiele für einfachere und öfter vorkommende Fälle als Erläuterung und Anhaltspunkte dienen.

1) Von welchen ganzen und positiven Zahlen ist das Produkt um 17 größer als ihre Summe?

Der Aufgabe gemäß ist die Bedingungsgleichung:

$xy - 17 = x + y$. Hieraus folgt

$xy - x = y + 17$, oder $x(y - 1) = y + 17$; also

$$x = \frac{y + 17}{y - 1} = 1 + \frac{18}{y - 1}.$$

Da nun x eine ganze Zahl werden soll, so setzen wir den Bruch $\frac{18}{y - 1} = m$, wodurch man also $x = 1 + m$, dann $y = \frac{18}{m} + 1$ erhält.

Weil aber auch y eine ganze Zahl werden soll, so muß 18 durch m theilbar sein. Bestimmt man nun (nach §. 82.) die Divisoren von 18, und setzt der Ordnung nach

$m = 1, 2, 3, 6, 9, 18,$

so wird $x = 2, 3, 4, 7, 10, 19,$
und $y = 19, 10, 7, 4, 3, 2.$

Die Aufgabe hat somit drei verschiedene Auflösungen, da die drei letzten schon in den ersten enthalten sind.

2) Welche ganzen positiven Zahlen genügen der Gleichung $x^2 + xy = 24$?

Löst man die gegebene Gleichung für y auf, so erhält man

$$y = \frac{24 - x^2}{x} = \frac{24}{x} - x.$$

Es muß hier wieder x ein Theiler von 24, und zugleich $24 > x^2$, mithin $x < \sqrt{24}$ sein. Setzen wir der Ordnung nach

$x = 1, 2, 3, 4$; so wird
$y = 23, 10, 5, 2.$

3) Welche Werthe sind für x zu setzen, damit der Ausdruck $y = \sqrt{x^2 + a}$ rational wird?

Da jedenfalls $\sqrt{x^2 + a} > x$ ist, so setzen wir

$\sqrt{x^2 + a} = x + m$; dadurch wird

$x^2 + a = x^2 + 2mx + m^2$, und hieraus

$$x = \frac{a - m^2}{2m},$$

wo für m jede beliebige rationale Zahl gesetzt werden kann. Für jede Annahme wird

$$y = x + m = \frac{a + m^2}{2m}.$$

4) Welche Zahlen sind in einem Ausdrucke von der Form $y = \sqrt{a + bx + cx^2}$ statt x zu setzen, damit der Werth von y rational wird?

Wir unterscheiden hiebei wieder zwei Fälle, ob nämlich a oder c selbst eine Quadratzahl ist, oder nicht. Demnach habe man

a) $y^2 - 3x^2 = 2(8 + x)$. Löst man diese Gleichung für y auf, so erhält man;

$$y = \sqrt{16 + 2x + 3x^2},$$

welcher Ausdruck obige Form hat. Man setze nun

$$\sqrt{16 + 2x + 3x^2} = 4 + mx, \text{ so wird}$$

$$16 + 2x + 3x^2 = 16 + 8mx + m^2x^2, \text{ oder}$$

$$2 + 3x = 8m + m^2x, \text{ woraus}$$

$$x = \frac{2(4m - 1)}{3 - m^2} \text{ folgt,}$$

wo m jede beliebige rationale Zahl bezeichnet.

Auf gleiche Weise setzen wir in Bezug auf die Gleichung $y = \sqrt{8 + 5x + 9x^2}$:

$$\sqrt{8 + 5x + 9x^2} = m + 3x, \text{ also}$$

$$8 + 5x + 9x^2 = m^2 + 6mx + 9x^2, \text{ oder}$$

$$8 + 5x = m^2 + 6mx, \text{ woraus sich}$$

$$x = \frac{8 - m^2}{6m - 5} \text{ ergibt.}$$

Für den andern Fall habe man die Gleichung:

b) $6x^2 - 10 = 11x + y^2$. Hieraus folgt

$$y = \sqrt{6x^2 - 11x - 10}.$$

Da nun weder 6 noch 10 ein Quadrat ist, so suchen wir (nach §. 81. oder §. 231, Zus. 2.) den Ausdruck $6x^2 - 11x - 10$ in zwei binomische Faktoren zu zerfällen, und erhalten dadurch

$$y = \sqrt{(3x + 2)(2x - 5)}. \text{ Nun setzen wir}$$

$$\sqrt{(3x + 2)(2x - 5)} = n(2x - 5)\text{, wodurch}$$
$$(3x - 2)(2x - 5) = n^2(2x - 5)^2\text{, oder}$$
$$3x + 2 = n^2(2x - 5)\text{ wird.}$$

Diese Gleichung für x gelöst, gibt

$$x = \frac{5n^2 + 2}{2n^2 - 3},$$

wo wieder für n jede beliebige Rationalzahl gesetzt werden kann. — Zum Schlusse habe man noch folgende Gleichung

5) $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen.

Aus vorstehender Gleichung folgt $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Setzt man, da jedenfalls $\sqrt{x^2 + y^2} > y$, aber $< y + x$ ist:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y + \frac{nx}{m}\text{, so wird}$$
$$x^2 + y^2 = y^2 + \frac{2nxy}{m} + \frac{n^2x^2}{m^2}\text{, woraus}$$
$$y = \frac{(m^2 - n^2)x}{2mn}\text{ folgt.}$$

Wird nun 1) $x = 2mn$ gesetzt, so erhält man

2) $y = m^2 - n^2$, und

3) $z = y + \frac{nx}{m} = m^2 + n^2$ *).

Demnach ist z. B. für

$m =$	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5 . . .
und $n =$	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4 . . .
$x =$	4	6	12	8	16	24	10	20	30	40 . . .
$y =$	3	8	5	15	12	7	24	21	16	9 . . .
$z =$	5	10	13	17	20	25	26	29	34	41 . . .

*) Die Auflösung dieser Aufgabe enthält die Bedingungen, unter denen die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes (in welchem bekanntlich das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten ist) rational sind, also ein sogenanntes pythagoräisches Dreieck geben.

C. Unmögliche Aufgaben.

§. 247.

Erkl. 1. Unmögliche Aufgaben nennt man solche, aus denen kein Werth der Unbekannten gefunden werden kann, welcher der Aufgabe in einem bestimmten Sinne Genüge leistet.

2. Eine Aufgabe ist unmöglich, wenn aus der zu ihrer Auflösung richtig formirten Gleichung Resultate gefunden werden, welche die Natur der Sache nicht zuläßt. Dieses ist der Fall, wenn die Bedingungen der Aufgabe irgend einen Widerspruch enthalten, wenn sie z. B. reelle, rationale, ganze oder positive Zahlen u. s. f. verlangt, die aber nicht gefunden werden können.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

1) Welche drei Zahlen haben die Eigenschaft, daß 1) $x + y = 15$, 2) $x + z = 20$, und 3) $y - z = 4$ ist. Durch Addition von 2) und 3) erhält man

$$4) \quad x + y = 24 .$$

Es ist aber 1) $x + y = 15$; mithin müßte auch $15 = 24$ sein, was ungereimt ist.

2) Von welcher Zahl beträgt der vierte und fünfte Theil zusammen soviel als ihre Hälfte? Der Aufgabe gemäß soll

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} \text{ sein.}$$

Hieraus folgt: $9x = 10x$.

Da es nun offenbar widersprechend ist, daß $9x = 10x$ sein kann, so gibt es keine Zahl mit der verlangten Eigenschaft.

3) Jemand hatte siebenmal soviele Gulden-, als Halbguldenstücke, und nachdem er 15 Gulden- und 5 Halbguldenstücke ausgegeben hatte, blieben ihm noch fünfmal soviel von den erstern, als von den letztern. Wie viele Stücke von beiden Sorten hatte er anfangs?

Man erhält den Bedingungen gemäß die Gleichung:

$$7x - 15 = 5(x - 5) \text{, und aus dieser}$$

$$x = -5 .$$

Da die Natur der Aufgabe einen negativen Werth nicht zuläßt, so enthält sie einen Widerspruch.

4) In einer Gesellschaft von 20 Personen befinden sich 7 Herren mehr als Damen; wie viele Herren und Frauen waren es? Man erhält hier aus der Gleichung:

$$x - 7 = 20 - x$$

$$x = 13\frac{1}{2}\ ;$$

also die Aufgabe unmöglich, da ein gebrochenes Resultat nicht zulässig ist.

5) Man soll die Zahl 24 in zwei Theile theilen, die 145 zum Produkte geben; welche sind es?

Man hat hier die Gleichung $x(24-x) = 145$, aus welcher $x = 12 \pm \sqrt{-1}$ wird; also die Auflösung unmöglich (vergl. §. 228, Zus. 1.).

6) Man soll 100 fl. in lauter ganzen Kronthalern (à 2 fl. 42 kr.) und Fünffrankenstücken (à 2 fl. 20 kr.) bezahlen. Wie viele sind von jeder Sorte zu nehmen?

Nach §. 243. findet man aus der Gleichung

$$\frac{27x}{10} + \frac{7y}{3} = 100$$

$x = 70q - 20$, und $y = 66 - 81q$; also die Lösung unmöglich, da für jeden Werth von q entweder x oder y negativ wird.

II. Abschnitt. Von den Proportionen und Progressionen.

I. Kap. Von den Proportionen.

§. 248.

Erkl. 1. Die Vergleichung zweier gleichartiger Größen hinsichtlich ihrer Größe oder auch der Entstehung der einen aus der andern nennt man das Verhältniß (Ratio) derselben.

2. Bei der Vergleichung zweier Größen kann entweder gefragt werden, a) um wie viel oder b) wie viel mal die eine größer sei als die andere. Ersteres ergibt sich offenbar durch Subtraktion, letzteres durch Division der einen Größe durch die andere.

3. Die Vergleichung zweier Größen hinsichtlich ihres Unterschiedes heißt ein arithmetisches, die bezüglich ihres Quotienten ein geometrisches Verhältniß *). Letzteres wird gewöhnlich schlechthin ein Verhältniß genannt.

4. Das arithmetische Verhältniß zweier Größen wird dem oben Gesagten zufolge fast allgemein durch das Subtraktionszeichen „—", das geometrische durch das Divisionszeichen „:" angedeutet, welches in beiden Fällen zwischen die Bezeichnungen derselben geschrieben, und durch „verhält sich (arithmetisch oder geometrisch) zu" übersetzt wird.

§. 249.

Erkl. 1. Bei einem Verhältnisse kommen dreierlei Größen in Betracht

a) die beiden verglichenen Größen selbst, welche man die Glieder (Termini) des Verhältnisses nennt, und zwar das erste oder voranstehende Vorderglied oder Vorsatz (Antecedens), das zweite oder nachstehende Hinterglied oder Nachsatz (Consequens);

b) die durch das Verhältniß bestimmte Größe, welche überhaupt Verhältnißzeiger oder Verhältnißexponent, und insbesondere beim arithmetischen Verhältnisse Differenz, beim geometrischen Quotient (auch Exponent oder Name) des Verhältnisses genannt wird.

2. Die allgemeine Form ist demnach, wenn a und b die beiden Glieder bezeichnen,

a) für ein arithmetisches Verhältniß $a - b$;

b) für ein geometrisches $a:b$ oder auch $\frac{a}{b}$.

Zus. 1. Sind von den drei bei einem Verhältnisse vorkommenden Größen zwei bekannt, so läßt sich immer die dritte finden, und zwar bei einem arithmetischen mittelst der Gleichung $a - b = d$, beim geometrischen mittelst $a : b = q$ (wobei d und q die Verhältnißzeiger andeuten).

Zus. 2. Jeder Bruch ist also das geometrische Verhältniß seines Zählers zum Nenner.

*) Geometrisch wegen seiner vielfachen Anwendung in der Geometrie.

§. 250.

Erkl. Ein Verhältniß heißt:

1. in Hinsicht auf die Größe seiner Glieder: steigend (wachsend) oder fallend (abnehmend), je nachdem das Hinterglied größer oder kleiner ist, als das Vorderglied;

2. in Beziehung auf den Verhältnißzeiger: rational oder irrational, je nachdem derselbe eine rationale oder irrationale Zahl ist, d. h. die Glieder des Verhältnisses commensurabel (durch irgend eine Einheit meßbar) sind, oder nicht.

Anm. Ein Verhältniß, dessen Glieder einander gleich sind, wird auch ein Verhältniß der Gleichheit genannt.

§. 251.

Erkl. 1. Werden zwei (oder mehrere) Verhältnisse auf einander bezogen, so nennt man sie

a) gleich, wenn sie gleiche Verhältnißzeiger haben, ungleich, wenn dieselben verschieden sind;

b) stetig (continuirlich), wenn immer das Hinterglied des einen dem Vordergliede des nächstfolgenden Verhältnisses gleich ist; außerdem heißen sie discret (abgesondert).

2. Vertauscht man die Glieder eines Verhältnisses, d. h. macht man das Vorderglied zum Hintergliede, und dieses zum Vordergliede, so heißt das neue Verhältniß in Bezug auf das gegebene das umgekehrte oder indirekte, das gegebene aber das gerade oder direkte. Z. B. b : a in Bezug auf a : b.

3. Werden die Vorsätze und ebenso die Nachsätze mehrerer geometrischer Verhältnisse mit einander multiplizirt, so heißt das Verhältniß der erhaltenen Produkte aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt, welche man die einfachen oder zusammensetzenden nennt.

Ein zusammengesetztes Verhältniß wird insbesondere ein multiplizirtes genannt, wenn die einfachen Verhältnisse gleich sind, und zwar ein duplizirtes oder quadratisches, wenn zwei, ein triplizirtes oder kubisches, wenn drei, ein biquadratisches, wenn vier gleiche Verhältnisse zusammengesetzt worden. So ist z. B. 4 : 9 das quadratische, 8 : 27 das kubische Verhältniß von 2 : 3.

Zus. Zwei Verhältnisse, welche demselben dritten gleich sind, sind es auch unter sich.

§. 252.

Erkl. 1. Die Verbindung zweier gleicher Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen nennt man eine Proportion (oder Verhältnißgleichung).

Die vier eine Proportion bildenden Größen heißen die Glieder derselben, die man der Ordnung nach zählt. Das erste und vierte werden äußere, das zweite und dritte mittlere oder innere, das erste und dritte (die beiden Vorsätze), ebenso das zweite und vierte (die beiden Nachsätze) homologe Glieder genannt. Der Verhältnißzeiger der beiden Verhältnisse einer Proportion hat diesen Namen auch in Bezug auf die Proportion selbst. Proportionen, welche gleiche Verhältnißzeiger haben, werden gleiche Proportionen genannt.

2. Eine Proportion, deren Verhältnisse stetig sind, welche also die innern Glieder gleich hat, heißt selbst stetig, außerdem diskret oder abgesondert.

3. In jeder Proportion wird das vierte Glied die vierte Proportionale zu den drei ersten, das mittlere Glied einer stetigen die mittlere Proportionale zwischen den beiden äußern, und das vierte Glied einer solchen Proportion die dritte Proportionale zu den beiden ersten genannt.

4. Die Proportionen theilen sich a) in arithmetische oder Differenzgleichungen und b) in geometrische oder Quotientengleichungen, je nachdem ihre Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch sind.

5. Als allgemeine Form einer Proportion, wenn a, b, c und d die vier Glieder derselben bezeichnen, kann gelten

a) für die arithmetische: $a - b = c - d$;

b) für die geometrische: $a : b = c : d$, oder auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Jede wird gelesen: „a verhält sich zu b, wie c zu d“, oder kürzer „a zu b, wie c zu d“.

Eine stetige Proportion wird gewöhnlich abgekürzt geschrieben, indem man das mittlere Glied nur einmal setzt, also z. B. statt $a : b = b : c$ nur $a : b : c$ schreibt.

6. Die Gleichheit mehrerer Verhältnisse nennt man eine **fortlaufende Proportion**, wobei man z. B. statt $a:b = c:d = e:f \ldots$ gewöhnlich $a:c:e \ldots = b:d:f \ldots$ schreibt.

Anm. Da die arithmetischen Proportionen fast gar keine Anwendung finden, so können sie füglich übergangen werden, und im Folgenden ist daher die Benennung „Verhältniß" oder „Proportion" ohne Beisatz stets als geometrisch zu verstehen.

§. 253.

Lehrs. In jeder Proportion ist das Produkt der äußern dem Produkte der innern Glieder gleich.

Dat. $a:b = c:d$.

Thes. $ad = bc$.

Bew. Da die Proportion als richtig vorausgesetzt ist, so hat man zwei gleiche Quotienten, d. h. es ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Entfernt man aus dieser Gleichung die Brüche (indem man beiderseits mit bd multiplizirt), so folgt $ad = bc$.

Zus. 1. In einer stetigen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Quadrate des innern Gliedes gleich; denn aus $a:b = b:c$ folgt $ac = b.b = b^2$.

Zus. 2. Eine Proportion läßt sich also auf zweifache Art in eine Gleichung verwandeln, indem man entweder die Quotienten aus den Vorsätzen getheilt durch die Nachsätze, oder die Produkte der äußern und innern Glieder einander gleichstellt.

§. 254.

Lehrs. Sind zwei Produkte von je zwei Faktoren einander gleich, so kann man aus ihnen eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen zu äußern, die des andern Produktes zu innern Gliedern macht (Umkehrung von §. 253.).

Dat. $ad = bc$.

Thes. $a:b = c:d$.

Bew. Dividirt man beide Seiten der Gleichung $ad = bc$ durch bd, so folgt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oder $a:b = c:d$.

Zus. 1. Eine Größe, deren Quadrat gleich ist dem Produkte zweier Faktoren, ist die mittlere Proportionale zwischen den Faktoren des Produktes. Denn ist $ad = b^2$, oder $ad = b . b$, so hat man $a : b : d$ (Lehrs.).

Zus. 2. Aus der Gleichung $ad = bc$ folgen so viele verschiedene Proportionen, als man die Faktoren auf verschiedene Weise zu äußern und mittlern Gliedern machen kann. Man erhält folgende acht Proportionen:

1) $a : b = c : d$	5) $c : d = a : b$
2) $a : c = b : d$	6) $c : a = d : b$
3) $b : d = a : c$	7) $d : b = c : a$
4) $b : a = d : c$	8) $d : c = b : a$.

Zus. 3. Da umgekehrt aus $a : b = c : d$ die Gleichung $ad = bc$ folgt, so können hieraus noch 7 andere Proportionen gebildet werden, die sich von der gegebenen nur durch die Stellung der Glieder unterscheiden. Diese sind sämmtlich in Zus. 2. enthalten, und aus der gegebenen theils durch Verwechslung der mittlern oder äußern Glieder, theils durch Vertauschung oder Umkehrung der Verhältnisse entstanden.

§. 255.

Lehrs. In jeder diskreten Proportion ist I. ein äußeres Glied gleich dem Produkte der innern getheilt durch das andere äußere, und II. ein inneres gleich dem Produkte der äußern dividirt durch das andere innere Glied.

Dat. $a : b = c : d$.

Thes. I. $a = \frac{bc}{d}$. — II. $b = \frac{ad}{c}$.

Bew. Aus der Proportion $a : b = c : d$ folgt die Gleichung $ad = bc$, und aus dieser unmittelbar (nach §. 209.)

$$\text{I. } a = \frac{bc}{d}, \text{ und } d = \frac{bc}{a}; \text{ dann}$$

$$\text{II. } b = \frac{ad}{c}, \text{ und } c = \frac{ad}{b}.$$

Zus. In einer stetigen Proportion ist ein äußeres Glied gleich dem Quadrate des innern getheilt durch das andere äußere; die mittlere Proportionale aber gleich der Quadratwurzel aus dem

Produkte der beiden äußern Glieder. Denn aus $a : b : c$ folgt $ac = b^2$; daher $a = \frac{b^2}{c}$; $c = \frac{b^2}{a}$ und $b = \sqrt{ac}$.

Anm. 1. Die Bestimmung der vierten Proportionale zu drei gegebenen Größen ist bekannt unter dem Namen: die einfache Regelbetri.

Anm. 2. Die mittlere arithmetische Proportionale zwischen zwei oder mehrern Größen, gewöhnlich das arithmetische Mittel genannt, ist gleich der Summe derselben getheilt durch ihre Anzahl. Z. B. das arithmetische Mittel für die Zahlen a und b ist $= \frac{1}{2}(a + b)$;
für a, b und c ist es $= \frac{1}{3}(a + b + c)$, u. s. f.

§. 256.

Lehrs. Sind in einer Proportion $a : b = c : d$ I. zwei homologe Glieder einander gleich, so sind es auch die beiden andern; ist dagegen II. das erste Glied größer oder kleiner als das dritte, so ist auch das zweite größer oder kleiner als das vierte.

I. Dat. $a = c$. — Thes. $b = d$.

Bew. Aus der gegebenen Proportion folgt $ad = bc$; mithin ist für $a = c$ auch $\frac{ad}{a} = \frac{bc}{c}$, d. i. $d = b$, und für $d = b$ auch $a = c$.

II. Dat. $a \gtrless c$. — Thes. $b \gtrless d$.

Bew. Da $ad = bc$ und $a \gtrless c$, so wird $\frac{ad}{a} \lessgtr \frac{bc}{c}$, d. i. $d \lessgtr b$ (§. 61.).

Zus. 1. Sind in einer Proportion $a : b = c : d$ die Glieder des einen Verhältnisses gleich $(a = b)$, so sind es auch die des andern; ist dagegen $a \gtrless b$, so ist auch $c \gtrless d$. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Lehrsatze, wenn man in der gegebenen Proportion die innern Glieder vertauscht.

Zus. 2. Zwei Gleichungen lassen sich zu einer Proportion verbinden, indem man die Seiten der einen zu Vor-, die der andern zu Nachsätzen macht; d. h. wenn $a = c$ und $b = d$, so ist auch $a : b = c : d$.

Zus. 3. Zwei Proportionen, welche drei Glieder der Ordnung nach gleich haben, haben auch die vierten gleich; denn aus

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \text{ , und} \\ \underline{a : b = c : m} \text{ folgt} \\ c : d = c : m \text{ (§. 251, Zus.); mithin} \\ d = m \text{ (Lehrs. I.).} \end{array}$$

§. 257.

Lehrs. Eine Proportion wird nicht geändert (bleibt beständig), wenn man I. ein äußeres und ein inneres Glied (also entweder α) die Glieder eines Verhältnisses oder β) zwei homologe Glieder), II. alle Glieder durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt.

Dat. $a : b = c : d$.

$$\text{Thes.} \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } \frac{am}{n} : \frac{bm}{n} = c : d \text{ ; } \frac{am}{n} : b = \frac{cm}{n} : d \text{ .} \\ \text{II. } \frac{am}{n} : \frac{bm}{n} = \frac{cm}{n} : \frac{dm}{n} \text{ .} \end{array} \right.$$

Bew. Folgt für beide Theile der Behauptung leicht aus §. 56., dann §. 39. und §. 59.

Für die Division ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung ganz auf dieselbe Weise.

Zus. 1. Jede Proportion läßt sich also durch Multiplikation von Brüchen befreien (oder in eine Proportion ganzer Zahlen verwandeln), durch Division in kleinern Zahlen darstellen.

Zus. 2. Jedes Verhältniß zweier Brüche läßt sich auf ein Verhältniß ganzer Zahlen, und dieses auf das Verhältniß relativer Primzahlen zurückführen. Denn ist z. B.

$$a : b = 6\tfrac{3}{11} : 4\tfrac{3}{5} \text{ , so wird zunächst}$$

$$a : b = \frac{69}{11} : \frac{23}{5} \text{ .}$$

Multiplizirt man die Glieder des zweiten Verhältnisses mit 55, so erhält man $a : b = 5 . 69 : 11 . 23$.

Hieraus folgt durch Division des zweiten Verhältnisses mit 23:

$$a : b = 15 : 11 \text{ ; daher ist}$$

$$6\tfrac{3}{11} : 4\tfrac{3}{5} = 15 : 11 \text{ (§. 251, Zus.).}$$

Zus. 3. Brüche verhalten sich bei gleichen Nennern wie ihre Zähler, bei gleichen Zählern wie ihre Nenner in umgekehrter Ordnung. Denn es ist z. B. (nach Zus. 2.) unmittelbar

$$1)\ \frac{3}{5} : \frac{7}{5} = 3 : 7\ ;\ \text{dann}$$

$$2)\ \frac{4}{7} : \frac{4}{9} = 9.4 : 7.4\ ,\ \text{d. i.}$$

$$= 9 : 7\ .$$

Zus. 4. Irrationale Zahlen lassen sich als Brüche betrachten; daher läßt sich auch das Verhältniß derselben (annäherungsweise) in ganzen Zahlen geben. Z. B.

$$1 : \sqrt{2} = 1 : 1{\cdot}4 = 10 : 14$$
$$= 5 : 7\ .$$

§. 258.

Lehrs. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des einen zur Summe oder Differenz der Glieder des andern Verhältnisses, wie ein Paar homologe Glieder.

Dat. $a : b = c : d$, so ist

Thes. $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$.

Bew. Aus $a : b = c : d$ folgt $bc = ad$. Wird diese Gleichung zu $ac = ac$ addirt oder davon subtrahirt, so ergibt sich

$$ac \pm bc = ac \pm ad \quad \text{oder}$$
$$(a \pm b)c = (c \pm d)a\ ;\ \text{daher}$$
$$(a \pm b) : (c \pm d) = a : c\ ,\ (\text{§. 254.})\ \text{also auch}$$
$$= b : d\ \ (\text{§. 251, Zus.}).$$

Zus. In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des einen zur Summe der Glieder des andern Verhältnisses, wie die Differenz der Glieder des ersten zur Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses. Denn es ist dem Lehrsatz gemäß:

$$(a + b) : (c + d) = a : c\ ,\ \text{ebenso}$$
$$(a - b) : (c - d) = a : c\ ;\ \text{daher auch}$$

$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)\ .$$

Anm. Nach dem Lehrs. und Zus. haben wir folgende, aus $a : b = c : d$ richtig abgeleiteten Proportionen:

1) $(a + b) : (c + d) = a : c = b : d$
2) $(a - b) : (c - d) = a : c = b : d$
3) $(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d)$.

Man vertausche in jeder die innern Glieder, und gebe die dadurch entstehenden neuen Proportionen in Worten!

§. 259.

Lehrs. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorder= zu seinem Hintergliede.

Dat. $a : b = c : d$.

Thes. $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b = c : d$.

Bew. Aus der gegebenen Proportion folgt $bc = ad$; also ist auch $ab \pm bc = ab \pm ad$, folglich $b(a \pm c) = a(b \pm d)$; und daher $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$, oder auch
$= c : d$.

Zus. In jeder Proportion verhalten sich die Summen der Vorder= und der Hinterglieder zu einander, wie ihre Differenzen. Denn es ist (nach Lehrs.)

$$(a + c) : (b + d) = a : b, \text{ und}$$
$$(a - c) : (b - d) = a : b; \text{ daher}$$

$$(a + c) : (b + d) = (a - c) : (b - d).$$

Anm. 1. Man verfahre mit den nach diesem Satze aus $a : b = c : d$ abgeleiteten Proportionen wie in §. 258. Anm., und gebe die erhaltenen neuen Proportionen in Worten!

Anm. 2. Nach diesem und dem vorhergehenden Satze lassen sich in einer Proportion zwei unbekannte Glieder finden, wenn ihre Summe oder Differenz bekannt ist. Z. B. wenn $x : y = 7 : 5$, und $x + y = 60$ oder $x - y = 10$ ist, so hat man (nach §. 258.):

$(x + y) : (7 + 5) = x : 7$ oder $(x - y) : (7 - 5) = x : 7$, d. i.
$60 : 12 = x : 7$ „ $10 : 2 = x : 7$,

woraus in beiden Fällen $x = 35$ und $y = 25$ folgt (§. 255, II.).

§. 260.

Lehrs. In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Dat. $a : b = c : d = e : f = g : h \ldots$

Thes. $(a + c + e + g \ldots) : (b + d + f + h \ldots) = a : b = c : d \ldots$

Bew. Da $a : b = c : d$, so ist (vermöge §. 259.):

$$(a + c) : (b + d) = a : b.$$

Weil aber, der Voraussetzung gemäß, auch $e : f = a : b$, so erhält man $(a + c) : (b + d) = e : f$.

Wendet man nun wieder §. 259. an, so ergibt sich

$(a + c + e) : (b + d + f) = e : f = a : b$ u. s. f.

Zus. Auf diesem Satze beruht die sogenannte einfache Theilungsregel, d. i. die Theilung einer Zahl in eine gegebene Anzahl von Theilen, die sich wie gegebene Zahlen verhalten, welche man Verhältnißzahlen nennt. Sie lautet:

„Die Summe aller Verhältnißzahlen verhält sich zur ganzen zu theilenden Zahl, wie jede einzelne Verhältnißzahl zu dem ihr entsprechenden Theile."

Soll demnach z. B. die Zahl N in drei Theile getheilt werden, die sich wie die Zahlen a, b, c verhalten, so haben wir, wenn wir die Theile durch x, y, z bezeichnen:

$$(a + b + c) : N = \begin{cases} a : x \\ b : y \\ c : z, \end{cases}$$

woraus sich x, y und z leicht ergeben (§. 255, I.).

(Man führe den Beweis für die Richtigkeit der Theilungsregel.)

Anm. Anwendungen findet die Theilungsregel bei den Gesellschafts-, dann bei den Mischungsrechnungen.

§. 261.

Lehrs. Werden die Glieder zweier (oder mehrerer) gleicher, d. i. solcher Proportionen, welche gleiche Quotienten haben, der Ordnung nach addirt oder subtrahirt, so stehen auch die Summen oder Differenzen in Proportion.

Dat. $\begin{cases} a : b = c : d, \text{ und} \\ e : f = g : h \text{ sind gleich.} \end{cases}$

Thes. $(a \pm e) : (b \pm f) = (c \pm g) : (d \pm h)$.

Bew. Da beide Proportionen gleiche Quotienten haben, so ist auch

$$a : b = e : f, \text{ und}$$
$$c : d = g : h; \text{ daher}$$
$$(a \pm e) : (b \pm f) = a : b \text{ (§. 259.), ebenso}$$
$$(c \pm g) : (d \pm h) = c : d = a : b; \text{ mithin}$$

$$(a \pm e) : (b \pm f) = (c \pm g) : (d \pm h).$$

Zus. 1. Sind mehrere Verhältnisse demselben dritten gleich, so ist es auch das Verhältniß der Summe ihrer Vor- zu der ihrer Nachsätze. Denn ist

$$\begin{aligned} a : b &= c : d \\ e : f &= c : d \\ g : h &= c : d \text{ , so ist auch} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + e + g) : (b + f + h) &= 3c : 3d \text{ (Lehrs.)} \\ &= c : d \text{ (§. 257, I.).} \end{aligned}$$

Zus. 2. Haben mehrere Proportionen die zweiten und die vierten Glieder beziehungsweise gleich, so verhält sich die Summe aller ersten Glieder zum zweiten, wie die Summe aller dritten Glieder zum vierten. Folgt durch Vertauschung der innern Glieder in den (vier) Proportionen des Zus. 1.

§. 262.

Lehrs. Werden die Glieder zweier (oder mehrerer) Proportionen der Ordnung nach mit einander multiplizirt, so bilden auch die Produkte eine Proportion.

Dat. $a : b = c : d$, und $e : f = g : h$.

Thes. $ae : bf = cg : dh$.

Bew. Da die beiden gegebenen Proportionen als richtig vorausgesetzt sind, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \text{; daher auch } \frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh} \text{ oder}$$

$$ae : bf = cg : dh .$$

Man nennt eine solche Proportion eine zusammengesetzte, die gegebenen Proportionen die zusammensetzenden.

Zus. Werden mehrere Proportionen zusammengesetzt, deren erste Verhältnisse stetig sind, so verhält sich das erste Vorderglied der ersten zum ersten Hintergliede der letzten Proportion, wie das Produkt aller dritten zu dem aller vierten Glieder. Denn hat man

$$\begin{aligned} a : x &= b : c \\ x : y &= d : e \\ y : z &= f : g \text{ , so ist} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} axy : xyz &= bdf : ceg \text{ , oder} \\ a \;:\; z &= bdf : ceg . \end{aligned}$$

Anm. 1. Hierauf beruht die zusammengesetzte Regeldetrie, welche nach der Anzahl der gegebenen Sätze Regula de quinque, de septem etc. genannt wird.

Anm. 2. Bei Anwendung der Regeldetrie auf Größen, welche im gewöhnlichen Leben vorkommen, hat man zu unterscheiden, ob sie gerade oder verkehrt proportional sind. Größen sind

a) gerade oder direkt proportional, wenn mit dem Zu- oder Abnehmen der einen auch ein Zu- oder Abnehmen der andern verbunden ist,

b) verkehrt oder indirekt proportional, wenn mit dem Zunehmen der einen ein Abnehmen der andern verbunden ist, und umgekehrt. Z. B. Zeiten und Räume, ebenso Geschwindigkeiten und Räume sind direkt, dagegen Geschwindigkeiten und Zeiten indirekt proportional; denn offenbar wird ein Körper, um einen bestimmten Weg zu machen, desto weniger Zeit brauchen, je schneller er sich bewegt, in Bezug auf den erstern Fall aber einen um so größern Weg zurücklegen, je länger er sich (bei gleicher Geschwindigkeit), oder je schneller er sich (bei gleicher Zeit) bewegt.

§. 263.

Lehrs. Werden die Glieder zweier Proportionen der Ordnung nach durch einander dividirt, so sind auch die Quotienten proportional (bilden eine Proportion).

Dat. $a : b = c : d$, und $e : f = g : h$.

Thes. $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$.

Bew. Ergibt sich (mittelst §. 59. und §. 105, Zus. 2.) auf ganz ähnliche Art wie §. 262.

§. 264.

Lehrs. Die Proportionalität der Glieder einer Proportion wird nicht aufgehoben, wenn man alle Glieder derselben entweder I. mit der nämlichen Zahl potenzirt, oder II. durch dieselbe Zahl radizirt.

Dat. $a : b = c : d$.

Thes. $\begin{cases} \text{I. } a^m : b^m = c^m : d^m. \\ \text{II. } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}. \end{cases}$

Bew. Aus der gegebenen Proportion folgt $ad = bc$, daher ist auch $(ad)^m = (bc)^m$ oder $a^m . d^m = b^m . c^m$ (§. 134. und §. 136.); also I. $a^m : b^m = c^m : d^m$ (§. 254.).

Auf dieselbe Weise ergibt sich (mittelst §. 155. und §. 158.) auch die Nr. II. aufgestellte Behauptung.

Zus. Eine Proportion, welche irrationale Glieder enthält, läßt sich also (mittelst Nr. I.) in eine andere umwandeln, die

lauter rationale Glieder hat, indem man sie mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Radikatoren potenzirt. So verwandelt sich z. B. durch Potenzirung mit 12 die Proportion

$$a : \sqrt{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[4]{d} \text{ in } a^{12} : b^6 = c^4 : d^3 .$$

§. 265.

Lehrs. Sind die Hinterglieder einer Proportion gleich den Vordergliedern einer andern, so sind die übrigen Glieder beider Proportionen gerade (d. i. in der nämlichen Ordnung genommen) proportional.

Dat. $a : b = c : d$ und $b : m = d : n$.

Thes. $a : m = c : n$.

Bew. Durch Zusammensetzung der beiden gegebenen Proportionen erhält man: $ab : bm = cd : dn$; daher

$$a : m = c : n \text{ (§. 257, I.).}$$

§. 266.

Lehrs. Haben zwei Proportionen die homologen Glieder (die Vor- oder Nachsätze) beziehungsweise gleich, so sind die andern homologen Glieder direkt (in derselben Ordnung genommen) proportional.

Dat. $a : b = c : d$ und $a : m = c : n$.

Thes. $b : m = d : n$.

Bew. Kehrt man in der ersten der gegebenen Proportionen die Verhältnisse um, und setzt die dadurch erhaltene Proportion $b : a = d : c$ mit der andern zusammen, so wird

$$ab : am = cd : cn ; \text{ also}$$
$$b : m = d : n .$$

§. 267.

Lehrs. Sind die innern Glieder einer Proportion gleich den äußern Gliedern einer andern, so sind die übrigen Glieder indirekt (d. i. in umgekehrter Ordnung genommen) proportionirt.

Dat. $a : b = c : d$ und $b : m = n : c$.

Thes. $a : m = n : d$.

Bew. Aus den gegebenen Proportionen folgt $ad = bc$ und $bc = mn$; folglich ist auch $ad = mn$, und daher

$$a : m = n : d \quad (\S.\ 254.).$$

§. 268.

Lehrs. Haben zwei Proportionen die innern (oder äußern) Glieder gleich, so sind die äußern (oder innern) Glieder umgekehrt proportional.

Dat. $a : b = c : d$ und $m : b = c : n$.

Thes. $a : m = n : d$.

Bew. Man erhält (wie in §. 267.) $ad = mn$; daher ist

$$a : m = n : d.$$

II. Kap. Von den Progressionen.

§. 269.

Erkl. 1. Eine Folge von Größen, welche nach einem bestimmten Gesetze entstehen, nennt man überhaupt eine Reihe (Series); jede einzelne jener Größen heißt ein Glied der Reihe. Jene Zahl, welche angibt, die wievielte Stelle ein Glied in einer Reihe einnimmt, heißt der Zeiger oder Index dieses Gliedes.

2. Die allgemeine Form, unter welcher eine Reihe von n Gliedern dargestellt werden kann, ist

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ldots\ a_{n-1},\ a_n,$$

wobei die Zeiger 1, 2, 3 . . . . n die Stelle des Gliedes in der Reihe anzeigen.

3. Eine Formel, vermittelst welcher sich jedes Glied einer Reihe bestimmen läßt (ohne die Reihe selbst bilden zu müssen), wird das allgemeine Glied, und die Formel für die Summe einer beliebigen Anzahl von auf einander folgenden Gliedern die Summenformel oder das summatorische Glied der Reihe genannt.

4. Man nennt ferner eine Reihe a) steigend (divergirend) oder fallend (convergirend), je nachdem ihre Glieder immer größer oder immer kleiner werden, b) endlich oder unendlich, je nachdem die Anzahl ihrer Glieder begrenzt oder unbegrenzt ist. Eine unendliche Reihe heißt auch ein Infinitinomium (vgl. §. 65, Zus.).

§. 270.

Erkl. 1. Eine Reihe, in welcher immer je drei auf einander folgende Glieder eine stetige Proportion bilden, nennt man eine Progression.

2. Die Progressionen werden eingetheilt in arithmetische und geometrische, je nachdem die auf einander folgenden Glieder derselben immer in demselben arithmetischen oder geometrischen Verhältnisse stehen.

A. Arithmetische Progressionen.

§. 271.

Erkl. 1. Eine arithmetische Progression ist eine Reihe von Zahlen, deren jede um die unmittelbar vorhergehende vermindert dieselbe Differenz gibt, welche also immer um die nämliche Zahl (die man deßhalb auch die Differenz der Progression nennt) wachsen oder abnehmen. — Eine solche bilden z. B. die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

2. Die allgemeine Form einer arithmetischen Progression, wenn a das erste oder Anfangsglied, d die Differenz, welche positiv oder negativ sein kann, bezeichnet, ist mit Angabe der Zeiger:

$$\overset{1}{a}\,;\ \overset{2}{a+d}\,;\ \overset{3}{a+2d}\,;\ \overset{4}{a+3d}\,;\ \overset{5}{a+4d}\,;\ \overset{6}{a+5d}\ \ldots.$$

Zus. 1. Eine arithmetische Progression ist steigend oder fallend, je nachdem die Differenz positiv oder negativ ist.

Zus. 2. Kennt man von einer arithmetischen Progression irgend ein Glied und die Differenz, oder sind zwei auf einander folgende Glieder gegeben, so kann man sie selbst auf beiden Seiten (vor- und rückwärts) beliebig weit fortsetzen. Sind z. B. 5 und 11 zwei auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression, so wird diese (da 6 die Differenz ist):

$$\ldots,\ -13,\ -7,\ -1,\ \mathbf{5},\ \mathbf{11},\ 17,\ 23,\ 29,\ \ldots.$$

§. 272.

Lehrs. Das allgemeine Glied einer arithmetischen Progression ist gleich der Summe aus dem ersten Gliede (a) und der Differenz, welche einen Koëffizienten hat, der um 1 kleiner ist, als der Zeiger des Gliedes.

Thes. $a_n = a + (n-1)d$.

Bew. Geht unmittelbar aus der Betrachtung der allgemeinen Form einer arithmetischen Progression hervor.

Z. B. Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren erstes Glied 1 und Differenz 2 ist, man erhält daher für die n^{te} derselben $a_n = 1 + (n-1)2 = 2n - 1$ (vgl. §. 72.).

Zus. Das letzte Glied (t) einer endlichen arithmetischen Progression von n Gliedern ist gleich dem ersten Gliede und dem Produkte aus der Differenz in die um 1 verminderte Anzahl der Glieder, d. h. es ist

$$t = a + (n - 1)d;$$

denn es ist t das n^{te} Glied der Reihe, hat also n als Index.

§. 273.

Aufg. Zwischen zwei gegebenen Zahlen α und β eine beliebige Anzahl (z. B. m) Glieder so einzuschalten (zu interpoliren), daß diese mit den gegebenen eine arithmetische Progression bilden.

Aufl. Bezeichnet man die Differenz der Progression, um deren Auffindung es sich lediglich handelt, durch δ, so ist

$$\delta = \frac{\beta - \alpha}{m + 1}.$$

Bew. Da m Glieder zwischen α und β eingeschaltet werden sollen, so wird die Progression aus $m + 2$ Gliedern (nämlich α, β und den m eingeschalteten) bestehen, folglich β als letztes Glied den Zeiger $m + 2$ haben; also

$$\beta = \alpha + (m + 2 - 1)\delta \text{ sein (§. 272, Zus.).}$$

Diese Gleichung für δ aufgelöst gibt obige Formel.

Setzt man z. B. $\alpha = 29$, $\beta = 5$ und $m = 5$, so wird $\delta = -4$; also die Progression:

$$29, 25, 21, 17, 13, 9, 5.$$

Zus. Eine arithmetische Progression von gegebener Gliederzahl läßt sich also auch bilden, wenn irgend zwei Glieder derselben mit ihren Zeigern bekannt sind.

§. 274.

Lehrs. Die Summe (s) einer arithmetischen Progression ist gleich dem Produkte aus der halben Gliederzahl in die Summe des ersten und letzten Gliedes.

Thes. $s = \frac{1}{2}n(a + t)$.

Bew. Ist a das erste, t das letzte Glied und d die Differenz der Progression, so ist offenbar

1) $s = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots + (t - d) + t$.

Dieselbe Summe wird sich ergeben, wenn man die Glieder umgekehrt vom letzten angefangen bis zum ersten addirt; d. h. es ist auch

2) $s = t + (t - d) + (t - 2d) + \ldots\ldots + (a + d) + a$.

Durch Addition der Gleichungen 1) und 2) ergibt sich

3) $2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) + \ldots\ldots + (a+t) + (a+t)$.

In dieser Gleichung kommt nun die Summe $(a + t)$ offenbar ebenso vielmal als Summand vor, als die Progression Glieder hat; also hat man, wenn diese Gliederzahl n ist:

$$2s = n(a + t)\text{; mithin } s = \tfrac{1}{2}n(a + t).$$

Z. B. Wie groß ist die Summe der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen von 1 bis 50, oder allgemein von 1 bis n?

Für den ersten Fall ist $a = 1$, $t = 50$ und $n = 50$, daher

$$s = \tfrac{1}{2}.50(1 + 50) = 25.51 = 1275;$$

für den zweiten Fall ist $a = 1$, $t = n$, also

$$s = \tfrac{1}{2}n(n + 1).$$

Zus. In jeder endlichen arithmetischen Progression ist die Summe je zweier vom ersten und letzten gleichweit abstehender Glieder gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes.

§. 275.

Aufg. Das summatorische Glied (s_n) für beliebig viele auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Progression zu finden.

Aufl. Bezeichnet a das erste Glied, d die Differenz und n die Anzahl der zu summirenden Glieder, so ist

$$s_n = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d] = na + \tfrac{1}{2}n(n - 1)d.$$

Bew. Nennen wir das letzte der in Rechnung kommenden Glieder t, so ist, da sie eine geschlossene Progression bilden, ihre Summe, oder $s_n = (a + t).\frac{1}{2}n$ (§. 274.).

Nun ist aber (nach §. 272, Zus.) $t = a + (n - 1)d$; mithin durch Substitution:

$$s_n = \tfrac{1}{2}n[a + a + (n - 1)d] = \tfrac{1}{2}n[2a + (n - 1)d].$$

Es ist klar, daß obige Formel auch zur Bestimmung der Summe einer ganzen Progression dient, deren Gliederzahl n, erstes Glied a und Differenz d ist.

Z. B. Ein freifallender Körper legt in der ersten Sekunde g, in der zweiten (wegen vermehrter Geschwindigkeit) 3g, in der dritten 5g Fuß ꝛc. zurück. Wie tief wird er in n Sekunden fallen? Es ist hier $a = g$, $d = 2g$; daher

$$s_n = ng + \tfrac{1}{2}n(n-1) \cdot 2g = gn^2 \text{*)}.$$

Zus. Nach dem Vorausgehenden haben wir

I. $t = a + (n-1)d$; II. $s = \tfrac{1}{2}n(a+t)$,

III. $s = \tfrac{1}{2}n[2a + (n-1)d] = na + \tfrac{1}{2}n(n-1)d$.

Löst man die Formel I. für a auf, und substituirt das erhaltene Aequivalent in II., so erhält man

IV. $s = \tfrac{1}{2}n[2t - (n-1)d]$.

Wird endlich die Formel I. für n aufgelöst, und sein Werth in II. gesetzt, so ergibt sich

V. $$s = \frac{(a+t)(t-a+d)}{2d}.$$

Jede von diesen fünf Hauptformeln, von denen die beiden ersten (I. u. II.) auch Fundamentalformeln genannt werden, enthält vier unbestimmte Größen, von denen jede unbekannt sein kann, wenn die drei andern gegeben sind oder durch anderweitige (in einer Aufgabe ausgesprochene) Bedingungen sich bestimmen lassen; es können daher mittelst derselben alle Aufgaben über arithmetische Progressionen aufgelöst werden.

B. Geometrische Progressionen.

§. 276.

Erkl. 1. Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, von denen jede durch die unmittelbar vorhergehende dividirt den nämlichen Quotienten gibt, der auch der Quotient der Progression genannt wird.

2. Die allgemeine Form einer geometrischen Progression, wenn a das erste Glied und q den Quotienten bezeichnet, ist mit Angabe der Zeiger:

1	2	3	4	5	6	
a;	aq;	aq^2;	aq^3;	aq^4;	aq^5;	....

*) Es ist der Fallraum der ersten Sekunde, d. i. $g = 16{\cdot}8$ bayer. Fuß $= 4{\cdot}905$ Meter $= 15{\cdot}625$ rheinländ. Fuß.

Zus. 1. Eine geometrische Progression ist steigend oder fallend, je nachdem $q \gtrless 1$ ist.

Zus. 2. Man erhält jedes Glied einer geometrischen Progression, wenn man das zunächst vorhergehende mit dem Quotienten der Progression multiplizirt.

Zus. 3. Sind also zwei auf einander folgende Glieder einer geometrischen Progression, oder ein Glied und der Quotient gegeben, so läßt sich die Progression vor- und rückwärts fortsetzen. Ist z. B. 6 irgend ein Glied, und der Quotient 3, so wird die Progression:

$$\ldots \tfrac{2}{27}, \tfrac{2}{9}, \tfrac{2}{3}, 2, \mathbf{6}, 18, 54, 162 \ldots.$$

Zus. 4. Ist der Quotient negativ, so werden die Glieder der Progression abwechselnd positiv und negativ. Z. B. für $a = 1$ und $q = -2$ erhält man: $1, -2, 4, -8, 16, -32 \ldots.$

§. 277.

Lehrs. Der Ausdruck für das allgemeine Glied (a_n) einer geometrischen Progression ist gleich dem Produkte aus dem ersten Gliede (a) und jener Potenz des Quotienten (q), deren Exponent um 1 kleiner ist, als der Zeiger (n) des Gliedes.

Thes. $a_n = aq^{n-1}$.

Bew. Folgt unmittelbar aus der Betrachtung der allgemeinen Form einer geometrischen Progression.

Ist z. B. $a = 5$ und $q = 2$, so erhält man für das 15te Glied der Reihe: 5, 10, 20 ....

$$a_{15} = 5 . 2^{14} = 5 . 16384 = 81920 .$$

Zus. Das letzte Glied (t) einer endlichen geometrischen Progression von n Gliedern ist also gleich dem Produkte aus dem ersten Gliede in jene Potenz des Quotienten, deren Exponent die um 1 verminderte Gliederzahl ist, d. h. es ist $t = aq^{n-1}$.

§. 278.

Aufg. Zwischen zwei gegebenen Zahlen (α und β) sollen m Zahlen eingeschaltet werden, welche mit den gegebenen eine geometrische Progression bilden.

Aufl. und Bew. Um den Quotienten (q) der Progression zu finden, ergibt sich durch dieselbe Betrachtung, wie §. 273, daß

$$\beta = \alpha q^{m+2-1} = \alpha q^{m+1} \text{ sein muß, woraus}$$

$$q = \sqrt[m+1]{\beta : \alpha} \text{ folgt.}$$

Sollen z. B. zwischen 24 und 375 noch 2 Zahlen geometrisch interpolirt werden, so hat man $\alpha = 24$, $\beta = 375$ und $m = 2$; daher

$$q = \sqrt[3]{\frac{375}{24}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}.$$

Die Reihe ist somit: 24 , 60 , 150 , 375 .

Zus. Eine geometrische Progression von gegebener Gliederzahl läßt sich also auch herstellen, wenn man irgend zwei Glieder nebst ihren Zeigern weiß.

Anm. Die nach Anleitung dieses Paragraphen interpolirten Glieder werden mittlere geometrische Proportionalen genannt; ihr Quotient läßt sich mit Hilfe der Logarithmen jedenfalls leicht finden.

§. 279.

Lehrs. Man erhält die Summe (s) einer endlichen geometrischen Progression von n Gliedern, wenn man vom Produkte des letzten Gliedes und des Quotienten das erste Glied abzieht, und die Differenz durch den um 1 verminderten Quotienten der Progression theilt.

Thes. $s = \frac{tq - a}{q - 1}$.

Bew. Es ist offenbar die Summe der ganzen Reihe, d. i.

1) $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + tq^{-1} + t$.

Multiplizirt man diese Gleichung mit q, so erhält man

2) $sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots t + tq$.

Subtrahirt man die Gleichung 1) von 2), so wird

$$sq - s = tq - a, \text{ oder}$$

$$s(q - 1) = tq - a; \text{ mithin}$$

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}.$$

Zus. 1. Da $t = aq^{n-1}$, so erhält man durch Substitution dieses Werthes in obige Formel:

$$s = \frac{aq^{n-1} \cdot q - a}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Nach dieser Formel läßt sich, wie leicht einzusehen, nicht nur die Summe der ganzen Progression, sondern auch die einer beliebigen Anzahl auf einander folgender Glieder, deren erstes a ist, bestimmen; sie ist daher das summatorische Glied für Größen, die in geometrischer Progression stehen.

Zus. 2. Aus der Gleichung $t = aq^{n-1}$ ergibt sich $a = t : q^{n-1}$. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung des Lehrs. oder des Zus. 1., so erhält man

$$s = \frac{t}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{t(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}.$$

Löst man endlich die Gleichung $t = aq^{n-1}$ für q auf, und substituirt das Aequivalent in die Gleichung des Lehrs., so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$s = \frac{t\sqrt[n-1]{t} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}} = \frac{\sqrt[n-1]{t^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

Zus. 3. Stellen wir die für das letzte Glied und die Summe einer geometrischen Progression entwickelten Gleichungen zusammen, so erhalten wir folgende fünf Hauptformeln, nach welchen sich die Aufgaben über geometrische Progressionen lösen lassen, sobald von den fünf in ihnen vorkommenden Größen drei gegeben sind, oder durch Nebenbedingungen sich bestimmen lassen:

I. $t = aq^{n-1}$;	III. $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$;
II. $s = \frac{tq - a}{q - 1}$;	IV. $s = \frac{t}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$;

$$\text{V.}\quad s = \frac{t\sqrt[n-1]{t} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{t} - \sqrt[n-1]{a}}.$$

§. 280.

Lehrs. Die Summe (s) einer unendlichen fallenden geometrischen Progression ist gleich dem ersten Gliede derselben getheilt durch die um den Quotienten der Progression verminderte Einheit.

Dat. $n = \infty$; $q < 1$. — Thes. $s = a : (1 - q)$.

Bew. Es ist $s = \frac{tq - a}{q - 1} = \frac{a - tq}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{tq}{1 - q}$.
Da nun in einer fallenden Progression, wie z. B.

$$1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{27}, \tfrac{1}{81}, \tfrac{1}{243} \ldots$$

die Glieder immer kleiner werden, so muß, wenn dieselbe bis in's Unendliche fortgesetzt wird, das letzte Glied unendlich klein sein, also $t = 0$ angenommen werden. Denn hätte t irgend einen bestimmten, noch angebbaren Werth, so könnte es durch weiteres Fortschreiten in der Reihe immer noch verkleinert werden, wäre also nicht das letzte. Wir erhalten somit

$$s = \frac{a}{1 - q} - \frac{0 . q}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Für die oben angegebene Reihe ist demnach

$$s = 1 : (1 - \tfrac{1}{3}) = 1 : \tfrac{2}{3} = 1{\cdot}5 .$$

Summirt man die Glieder der Reihe wirklich, so zeigt sich, daß die Summe dem Grenzwerthe 1·5 um so näher kommt, je mehr Glieder genommen werden.

Zus. Zu den unendlichen fallenden geometrischen Progressionen gehören die unendlichen Dezimalbrüche, deren Verwandlung in gemeine Brüche auf dem Lehrs. beruht. Z. B.

$0{\cdot}636363 \ldots = 63(0{\cdot}01 + 0{\cdot}0001 + 0{\cdot}000001 + \ldots)$

Für die eingeschlossene Reihe ist $a = 0{\cdot}01$, $q = 0{\cdot}01$; daher

$$s = \frac{0{\cdot}01}{1 - 0{\cdot}01} = \frac{0{\cdot}01}{0{\cdot}99} = \frac{1}{99}; \text{ also}$$

$$0{\cdot}636363 \ldots = 63 . \frac{1}{99} = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}. \text{ (Vgl. §. 113.)}$$

C. Von den höhern arithmetischen Reihen und figurirten Zahlen.

§. 281.

Erkl. 1. Ist irgend eine Reihe gegeben, und man subtrahirt jedes Glied derselben von dem unmittelbar darauf folgenden, so entsteht eine neue Reihe, welche die erste Differenzreihe genannt wird. Verfährt man mit dieser auf gleiche Art, so erhält man die zweite Differenzreihe, aus dieser ergibt sich auf die nämliche Weise die dritte, aus dieser die vierte ....

Differenzreihe. Die gegebene Reihe selbst heißt in Bezug auf die aus ihr abgeleiteten Differenzreihen die Hauptreihe.

2. Eine Reihe heißt von der sovielten Ordnung, als die wievielte aus ihr abgeleitete Differenzreihe aus lauter gleichen Gliedern besteht. Z. B. die Kubikzahlen bilden eine Reihe der dritten Ordnung; denn aus

1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 . . .	als Hauptreihe folgt
7 , 19 , 37 , 61 , 91 . . .	als erste Differenzreihe
12 , 18 , 24 , 30	„ zweite „
6 , 6 , 6	„ dritte „

Zus. 1. Die erste Differenzreihe hat um 1, die zweite um 2, die dritte um 3 u. s. f., die m^{te} um m Glieder weniger als die Hauptreihe.

Zus. 2. Die arithmetische Progression ist eine Reihe der ersten Ordnung (§. 271.).

Zus. 3. Jede Differenzreihe kann als Hauptreihe der aus ihr abgeleiteten Differenzreihe betrachtet werden.

§. 282.

Lehrs. Das n^{te} Glied (a_n) einer Reihe ist gleich ihrem Anfangsgliede (a_1) und der Summe aus den (n — 1) ersten Gliedern (d_1, d_2, d_3 . . . . d_{n-1}) ihrer ersten Differenzreihe.

Thes. $a_n = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1}$.

Bew. Die erste Differenzreihe entsteht, indem man jedes Glied der Hauptreihe von dem darauf folgenden abzieht. Behält man daher für die Hauptreihe die (§. 269, 2.) eingeführte Bezeichnung bei, so ist

$a_2 - a_1 = d_1$, daher durch Transposition

$$a_2 = a_1 + d_1 \text{. Ebenso ergibt sich}$$
$$a_3 = a_2 + d_2,$$
$$a_4 = a_3 + d_3,$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + d_{n-2}$$
$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, \text{ woraus durch Addition}$$

$$a_n = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{n-2} + d_{n-1} \text{ folgt.}$$

§. 283.

Aufg. Eine Formel für das allgemeine Glied (a_n) einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung zu bestimmen.

Aufl. Ist a das erste Glied der gegebenen Reihe, d′ und d″ die Anfangsglieder der ersten und zweiten Differenzreihe, so erhält man

$$a_n = a + (n - 1)d' + \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2)d'' .$$

Bew. Jedes Glied der gegebenen Reihe ist gleich ihrem ersten Gliede (a), mehr der Summe aus den (n — 1) ersten Gliedern der ersten Differenzreihe; diese ist aber eine Reihe der ersten Ordnung mit dem Anfangsgliede d′ und der Differenz d″; somit die Summe ihrer ersten (n—1) Glieder (nach der Formel des §. 275.) $= (n - 1)d' + \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2)d''$. Also wird

$$a_n = a + (n - 1)d' + \tfrac{1}{2}(n - 1)(n - 2)d'' .$$

Zus. 1. Setzt man in dem eben gefundenen allgemeinen Gliede successive n = 1, 2, 3, ..., so erhält man als allgemeine Form einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung: a; a + d′; a + 2d′ + d″; a + 3d′ + 3d″; a + 4d′ + 6d″; a + 5d′ + 10d″ u. s. w.

Zus. 2. Sind von einer Reihe der zweiten Ordnung drei auf einander folgende Glieder bekannt, so läßt sich dieselbe beliebig fortsetzen. Denn man erhält aus ihnen durch Subtraktion zwei Glieder der ersten, und aus diesen ein Glied der zweiten Differenzreihe. Mittelst des letztern kann man die erste Differenzreihe (nach §. 271, Zus. 2.), und mittelst dieser die Hauptreihe (nach §. 282.) bilden. Sind z. B. 1, — 5 und 4 die Anfangsglieder einer Reihe zweiter Ordnung, so erhält man:

1, — 5, 4, 28, 67, 121, 190, 274, ...
— 6, 9, 24, 39, 54, 69, 84, ...
15, 15, 15, 15, 15, 15, ...

Zus. 3. Eine Reihe der zweiten Ordnung ist auch durch irgend 3 Glieder derselben bestimmt. Denn durch die 3 gegebenen Glieder ist man im Stande 3 einfache Gleichungen für die 3 Größen a, d′ und d″ herzustellen. Sind aber diese gefunden, so läßt sich die Reihe leicht formiren. Ist z. B. das fünfte Glied oder $a_5 = 73$, dann $a_9 = 109$ und $a_{16} = 95$, so erhält man die Gleichungen:

1) $73 = a + 4d' + 6d''$
2) $109 = a + 8d' + 28d''$
3) $95 = a + 15d' + 105d''$, aus welchen
$a = 5$, $d' = 20$ und $d'' = -2$ gefunden wird.

§. 284.

Aufg. Einen allgemeinen Ausdruck für die Summe (s_n) von n auf einander folgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung zu finden.

Aufl. Bezeichnet a das erste Glied derselben, d' und d'' die Anfangsglieder der ersten und zweiten Differenzreihe, so ist

$$s_n = na + \frac{n(n-1)}{1.2}.d' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.d''.$$

Bew. Die ersten Glieder der Reihe sind (nach §. 283, Zus. 1.): a; $a + d'$; $a + 2d' + d''$; $a + 3d' + 3d''$; folglich, wenn man die Summe der ersten 2, 3, 4 ... Glieder durch s_2, s_3, s_4 ... bezeichnet: $s_2 = 2a + d'$; $s_3 = 3a + 3d' + d''$; $s_4 = 4a + 6d' + 4d''$ u. s. f. Diese Werthe erhält man aber auch aus der gegebenen Formel, wenn man in derselben nach und nach $n = 2, 3, 4 ...$ setzt.

Ist nun die Formel für n Glieder giltig, so muß sie es auch, um allgemein zu gelten, für $(n + 1)$ Glieder sein. Die Summe von $(n + 1)$ Gliedern erhält man aber offenbar, wenn man zur Summe von n Gliedern das $(n + 1)^{te}$, nämlich

$$a_{n+1} = a + nd' + \tfrac{1}{2}n(n-1)d'' \text{ (§. 283.)}$$

addirt. Dadurch erhält man

$$s_n + a_{n+1} = (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}.d' + \frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}.d''.$$

Diese Summe ergibt sich aber auch, wenn man in der angegebenen Formel $(n + 1)$ statt n setzt; mithin ist dieselbe allgemein giltig.

Z. B. In Bezug auf die 8 Glieder der §. 283, Zus. 2. angeführten Reihe ist $a = 1$, $d' = -6$ und $d'' = 15$; also wird

$$s_8 = 8.1 - \frac{8.7}{2}.6 + \frac{8.7.6}{2.3}.15 = 8 - 168 + 840 = 680.$$

Allgemein erhält man für n Glieder der eben angeführten Reihe:

$$s_n = \tfrac{1}{2}n(n-3)(5n-6).$$

Man finde z. B. für die Summe (s_n) von n Gliedern folgender Reihen:

a) $1.2\,,\ 2.3\,,\ 3.4\,,\ 4.5\ \ldots\ n(n+1)$.

$s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

b) $1.2\,,\ 3.4\,,\ 5.6\,,\ 7.8\ \ldots\ (2n-1).2n$

$s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$

c) $1.3\,,\ 2.4\,,\ 3.5\,,\ 4.6\ \ldots\ n(n+2)$

$s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

Anm. Man pflegt der Abkürzung wegen $\frac{n(n-1)}{1.2} = n_2$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = n_3$, ebenso $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} = (n-1)_2$, allgemein einen Ausdruck von der Form $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-[m-1])}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,m} = n_m$ zu setzen (vgl. §. 341.).

Nehmen wir diese Bezeichnung an, so erhalten wir für das allgemeine und summatorische Glied einer Reihe der zweiten Ordnung etwas kürzer:

a) $a_n = a + (n-1)d' + (n-1)_2 d''$ und

b) $s_n = na + n_2 d' + n_3 d'''$.

§. 285.

Aufg. Das allgemeine und summatorische Glied (a_n und s_n) einer Reihe der dritten Ordnung zu bestimmen.

Aufl. Wenn a das erste Glied, dann d', d'', d''' die Anfangsglieder der ersten, zweiten und dritten Differenzreihe bezeichnen, so erhält man (die §. 284, Anm. angeführten kürzern Bezeichnungsweisen beibehaltend):

I. $a_n = a + (n-1)d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d'''$.

II. $s_n = na + n_2 d' + n_3 d'' + n_4 d'''$.

Bew. I. Das n^{te} Glied ist gleich dem ersten Gliede der gegebenen Reihe und der Summe von $(n-1)$ Gliedern der ersten Differenzreihe (§. 282.). Diese ist aber von der zweiten Ordnung, also die Summe von $(n-1)$ Gliedern derselben, deren erstes d' ist, $= (n-1)d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d'''$ (§. 284.). Addirt man diese Summe zu dem ersten Gliede a, so erhält man die oben angegebene Formel I.

II. Setzt man in dem allgemeinen Gliede nach und nach $n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$, so erhält man die Reihe: a; $a + d'$;

$a + 2d' + d''$; $a + 3d' + 3d'' + d'''$ u. s. w.; also ergibt sich auf dieselbe Weise wie §. 284. als Summe der ersten 2, 3, 4 .... Glieder: $s_2 = 2a + d'$; dann $s_3 = 3a + 3d' + d''$; ferner $s_4 = 4a + 6d' + 4d'' + d'''$, welche Werthe auch aus der gegebenen Summenformel (II.) sich ergeben, wenn in derselben $n = 2, 3, 4$ gesetzt wird. Ist nun im Allgemeinen die Formel II. für n Glieder richtig, so erhält man die Summe von $(n+1)$ Gliedern, indem dazu noch das $(n+1)^{te}$ Glied, nämlich

$$a_{n+1} = a + nd + \frac{n(n-1)}{2}d'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}d'''$$

addirt wird. Man findet aber dann nach gehöriger Reduktion:

$$s_{n+1} = (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}d' + \frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}d'' + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.3.4}d''',$$

was offenbar auch aus der Formel II. entsteht, wenn man darin $(n+1)$ statt n setzt. Die Formel ist somit für jede Anzahl von Gliedern, also allgemein giltig.

Z. B. um die Summe der ersten n Kubikzahlen zu finden, hat man (§. 281, 2.): $a = 1$, $d' = 7$, $d'' = 12$ und $d''' = 6$, und man erhält nach gehöriger Reduktion:

$$s_n = (\tfrac{1}{2}n(n+1))^2 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 .$$

Für die §. 281. angegebenen 6 Kubikzahlen ist demnach

$$s_6 = \tfrac{1}{4}.36.49 = 9.49 = 441,$$

was sich auch durch die wirkliche Addition ergibt. — Man finde zur weitern Uebung als summatorisches Glied folgender Reihen:

a) $1.2.3, 2.3.4, 3.4.5, 4.5.6 \ldots\ldots n(n+1)(n+2)$:

$$s_n = \tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

b) $1.2.3, 4.5.6, 7.8.9 \ldots\ldots\ldots (3n-2)(3n-1)3n$:

$$s_n = \tfrac{3}{4}n(n+1)(3n-2)(3n+1).$$

Zus. 1. Auf demselben Wege fortfahrend findet man (die §. 284, Anm. angeführte kürzere Bezeichnungsweise annehmend) für eine Reihe der vierten Ordnung:

$$a_n = a + (n-1)d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d''' + (n-1)_4 d'''',$$ und
$$s_n = na + n_2 d' + n_3 d'' + n_4 d''' + n_5 d''''.$$

Allgemein erhält man für eine Reihe der m^{ten} Ordnung, wenn δ das Anfangsglied der m^{ten} Differenzreihe bezeichnet:

$$a_n = a + (n-1)d' + (n-1)_2 d'' + (n-1)_3 d''' + \ldots + (n-1)_m \delta,$$
$$s_n = na + n_2 d' + n_3 d'' + n_4 d''' + \ldots\ldots + n_{m+1}\delta.$$

Zus. 2. Eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung ist durch vier, eine Reihe der vierten Ordnung durch fünf, allgemein eine Reihe der m^{ten} Ordnung durch $m + 1$ Glieder derselben vollkommen bestimmt. (Vgl. §. 283, Zuss. 2. und 3.)

§. 286.

Erkl. 1. Setzt man in der allgemeinen Form für arithmetische Progressionen $a = 1$, so erhält man die Progression: $1;\ 1+d;\ 1+2d;\ 1+3d;\ 1+4d;\ \ldots\ldots\ 1+(n-1)d$. Sucht man in dieser nach und nach die Summe von 1, 2, 3, 4 .... n Gliedern, so ergibt sich folgende Reihe:
$1;\ 2+d;\ 3+3d;\ 4+6d;\ 5+10d;\ \ldots\ldots\ n+\frac{1}{2}n(n-1)d$.
Wird in dieser Reihe successive $d = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ gesetzt, so entstehen folgende Zahlenreihen:

I. 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 . . .
II. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 . . .
III. 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 . . .
IV. 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91 . . . u. s. w.,

welche man Reihen der vieleckigen oder Polygonalzahlen nennt, da sich ihre Glieder durch soviele Punkte (Kreise oder Kugeln), als sie Einheiten haben, in der Form von Vielecken darstellen lassen. Insbesondere nennt man

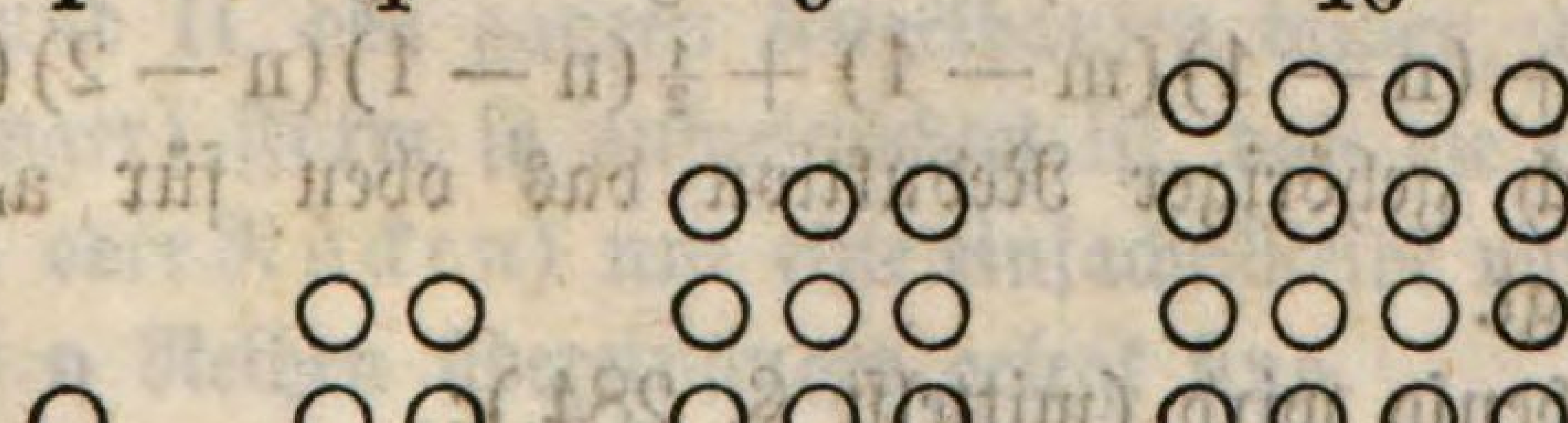
a) die Zahlen der Reihe I. dreieckige, Trigonal- oder Triangularzahlen, da sie sich durch Dreiecke darstellen lassen. Z. B. 1 3 6 10



u. s. f.

b) die Zahlen der Reihe II. viereckige, Tetragonal- oder Quadratzahlen, weil ihre Glieder durch Quadrate dargestellt werden können. Z. B.

1 4 9 16



ꝛc.

c) die Zahlen der Reihe III. heißen aus demselben Grunde fünfeckige oder Pentagonalzahlen;

d) die der Reihe IV. sechseckige oder Hexagonalzahlen 2c.

2. Wird aus jeder Polygonalzahlenreihe eine neue Reihe der Art abgeleitet, daß jedes n^{te} Glied derselben gleich der Summe von n Gliedern der gegebenen Reihe ist, so erhält man folgende Reihen:

I. 1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 . . .
II. 1 , 5 , 14 , 30 , 55 , 91 . . .
III. 1 , 6 , 18 , 40 , 75 , 126 . . .
IV. 1 , 7 , 22 , 50 , 95 , 161 . . .

welche man die Reihen der Pyramidalzahlen nennt, da ihre Glieder durch vollständige Pyramiden dargestellt werden können, wie man sie in Zeughäusern mit gleichen Kugeln aufgeschichtet sieht, so daß also die einzelnen Schichten der Pyramide von den Gliedern einer Reihe der Polygonalzahlen gebildet werden.

Insbesondere heißt von obigen Reihen die I. die Reihe der dreieckigen, die II. die der viereckigen Pyramidalzahlen u. s. f.

Die Reihen der Polygonal- und Pyramidalzahlen werden überhaupt figurirte Zahlen genannt. (Im weitern Sinne heißen die Glieder aller arithmetischen Reihen, deren erstes Glied die Einheit ist, figurirte Zahlen.)

§. 287.

Aufg. Das allgemeine Glied (a_n) und das summatorische (s_n) für jede Art der Polygonalzahlen zu finden.

Aufl. Es ist für jede Reihe der meckigen Zahlen:

I. $a_n = \frac{1}{2} n [n(m-2) - (m-4)]$;

II. $s_n = \frac{1}{6} n (n+1) . [n(m-2) - (m-5)]$.

Bew. I. Die Polygonalzahlen bilden sämmtlich Reihen der zweiten Ordnung, in welchen $a = 1$ ist; ferner ist für jede meckige Zahl, wie man sich durch Bildung der Differenzreihen leicht überzeugt, $d' = m - 1$ und $d'' = m - 2$; man erhält daher durch Substitution dieser Werthe in die Formel §. 283.:

$$a_n = 1 + (n-1)(m-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(m-2),$$

woraus nach gehöriger Reduktion das oben für a_n angegebene Resultat folgt.

II. Ebenso wird (mittelst §. 284.):

$$s_n = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (m-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot (m-2),$$

woraus man die Gleichung II. erhält.

Diese Summenformel ist offenbar auch das allgemeine Glied für die Pyramidalzahlen (§. 286, 2.).

Zus. 1. Setzt man in obigen Formeln successive $m = 3, 4, 5, 6$, so erhält man:

a) für die Triangularzahlen:

$a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$;

b) für die Quadratzahlen:

$a_n = n^2$ und $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) für die Pentagonalzahlen:

$a_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ und $s_n = \frac{1}{2}n^2(n+1)$;

d) für die Hexagonalzahlen:

$a_n = n(2n-1)$, und $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ u. s. w.

Zus. 2. Bei einer dreieckigen Kugelpyramide enthält demnach die unterste (n^{te}) Lage $\frac{1}{2}n(n+1)$, und der ganze Haufen $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ Kugeln; ebenso hat bei einer vierseitigen die Grundlage n^2 und die ganze Pyramide $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ Kugeln. Durch die letztere Formel ist auch die Summe der ersten n Quadratzahlen ausgedrückt.

Zus. 3. Ist eine der eben genannten Pyramiden unvollständig (abgekürzt), und enthält in einer Seite der obersten Reihe m Kugeln, so ist die Summe (S) der Kugeln des ganzen Haufens, da eine Pyramide fehlt, bei welcher eine Seite der Grundlage $(m-1)$ Kugeln enthält,

a) bei der dreiseitigen Pyramide:

$S = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{6}(m-1)m(m+1)$,

b) bei der vierseitigen:

$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)$.

§. 288.

Aufg. Die Anzahl der Kugeln zu finden, welche I. die Grundlage und II. den ganzen Kugelhaufen bilden, der in länglichter (oblonger) Form so aufgeschichtet ist, daß die oberste Reihe (der Kamm oder Rücken) nur eine einfache Reihe von m Kugeln enthält, und n Reihen übereinander gelegt sind.

Aufl. Bezeichnet man die Anzahl der Kugeln in der Grundlage durch s_n, die im ganzen Haufen durch S_n, so ist

I. $s_n = n(m + n - 1)$.

II. $S_n = \frac{1}{6} n(n + 1)(3m + 2n - 2)$.

Bew. Die oberste Reihe, welche m Kugeln enthält, wird von zwei Reihen getragen, deren jede aus $(m + 1)$ Kugeln besteht, die zweite Lage wird wieder von drei Reihen gestützt, deren jede aus $m + 2$ Kugeln besteht u. s. f. Die Anzahl der Kugeln in den aufeinander folgenden Lagen bilden daher die Reihe

$$m\,,\quad 2(m+1)\,,\quad 3(m+2)\,,\quad 4(m+3)\ \ldots\ldots\,;$$

welche von der zweiten Ordnung, und in der $a = m$, $d' = m + 2$ und $d'' = 2$ ist.

Substituirt man diese Werthe in die §. 283. und §. 284. gefundenen Formeln, so erhält man die beiden oben für s_n und S_n angegebenen Gleichungen.

Zus. 1. Enthält die kleine Seite der Grundlage eines solchen Haufens n, die große m Kugeln, so enthält der Kamm $m - (n - 1) = m - n + 1$ Kugeln; ferner wird

$$s_n = mn\,,\quad \text{und}\quad S_n = \tfrac{1}{6} n(n + 1)(3m - n + 1)\,.$$

Zus. 2. Ist ein oblonger Kugelhaufen abgekürzt (nicht vollständig) und es hat die kleine Seite der obersten Lage p, die große q Kugeln, so fehlt ein Kugelhaufen, bei welchem die kleine Seite der Grundlage $(p - 1)$, die große $(q - 1)$ Kugeln enthält, dadurch wird, wenn die kleine Seite der Grundlage n, die große m Kugeln enthält, die Anzahl der Kugeln des ganzen Haufens, d. i.

$$S = \tfrac{1}{6} n(n+1)(3m - n + 1) - \tfrac{1}{6} p(p - 1)(3q - p + 1)\,.$$

Zus. 3. Oefter werden Kugeln in den Zeughäusern auch so aufgeschichtet, daß die Grundfläche ein Viereck ist, aus dem ein anderes kleineres gleichsam herausgeschnitten ist. Enthält in diesem Falle der Kamm m Kugeln, so werden diese von zwei Reihen von $m + 4$ und $m - 4$ also $2m$, diese wieder von drei Reihen zu $m + 8$, m, und $m - 8$, d. i. $3m$ Kugeln u. s. f. getragen; mithin ist bei n Lagen die Anzahl aller Kugeln des ganzen vollständigen Haufens, d. i.

$$S_n = m + 2m + 3m + \ldots nm = m(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)$$
$$= \tfrac{1}{2} mn(n + 1)\,.$$

III. Abschnitt. Von der Zins-, Disconto- und Rentenrechnung.

§. 289.

Erkl. 1. Eine Summe Geldes, die Jemand einem Andern zur Benützung gegen eine bestimmte Vergütung auf gewisse Zeit überläßt, heißt ein Kapital (im engern Sinne).

Derjenige, welcher ein Kapital herleiht (vorstreckt) wird überhaupt Kapitalist, in Bezug auf jenen aber, dem er es vorschießt, der Gläubiger, der dasselbe Entlehnende der Schuldner genannt.

2. Den Betrag, welcher für das Darleihen eines Kapitals von Seite des Schuldners an den Gläubiger in bestimmten Zeiträumen (Terminen) zu entrichten ist, nennt man Zinsen oder Interessen (auch Kapitalsrente).

3. Die Bestimmung der Interessen geschieht gewöhnlich nach jährlichen Prozenten. Man versteht darunter das Geldquantum, welches auf ein Jahr für je 100 fl. des ausgeliehenen Kapitals als Vergütung gefordert wird.

Anm. 1. Im weitern Sinne ist ein Kapital jede Art oder jeder Vorrath von Gewinn abwerfenden Dingen, z. B. Felder, Gärten, Waldungen, Wohngebäude, die man verpachtet oder vermiethet u. s. f.

Anm. 2. Die jährlichen Prozente wechseln in der Regel von 3 bis 5 vom Hundert.

§. 290.

Erkl. 1. Die Interessen eines Kapitals sind zweifacher Art:

a) einfache, wenn sie jedesmal nach einem festgesetzten Termine (gewöhnlich einem Jahre) entweder wirklich entrichtet werden, oder doch für eine Verspätung in dem Einhalten des Termines nichts vergütet, der Zins also bloß vom Kapitale bezahlt wird;

b) zusammengesetzte oder Zinseszinsen (Zins vom Zinse), wenn sie jährlich (oder nach bestimmten Terminen) zum Kapitale geschlagen, und mit demselben zugleich verzinst werden.

2. Die Rechnung mit nur einfachen Zinsen wird einfache Zinsrechnung, die mit Zinseszinsen zusammengesetzte oder Zinseszinsrechnung genannt. Erstere findet ihre ausführ-

lichere Erledigung in der Lehre von den Proportionen, letztere wird im Nachfolgenden nebst ihrer Anwendung auf die Diskonto- und Rentenrechnung behandelt.

I. Kap. Von der Zinseszinsrechnung.

§. 291.

Aufg. Die Summe (s) zu finden, zu der ein auf einfache Zinsen ausgeliehenes Kapital in einer bestimmten Anzahl von Jahren anwächst.

Aufl. Bezeichnet a das ausgeliehene Kapital, n die Anzahl der Jahre, und p die jährlichen Prozente, so ist

$$s = a\left(1 + \frac{np}{100}\right) = \frac{a}{100} \cdot (100 + np) .$$

Bew. Da 100 fl. in einem Jahre p fl. Zins geben, so treffen offenbar auf jeden einzelnen Gulden p : 100, also auf a fl. Kapital ap : 100. Dieser Betrag wiederholt sich nun in jedem Jahre; muß daher, wenn das Kapital n Jahre lang benützt wird, $\frac{ap}{100} \cdot n = \frac{apn}{100}$ werden. Man erhält somit, wenn z die Zinsen bezeichnet, die das Kapital a in n Jahren zu p% (p Prozent) abwirft, $z = \frac{apn}{100} = 0{\cdot}01\,apn$.

Da aber das Kapital und seine n-jährigen Zinsen die Anwachsungssumme geben, so ist

$$s = a + z = a + \frac{apn}{100} = \frac{a}{100}(100 + np) .$$

Zus. 1. In den beiden für z und s aufgestellten Formeln kann jede von den 4 darin vorkommenden Größen unbekannt sein, wenn die drei andern gegeben sind, und zwar folgt

I. aus $z = 0{\cdot}01\,apn$:

$$\textbf{a)}\ a = \frac{100z}{np}, \quad \textbf{b)}\ p = \frac{100z}{an}, \quad \textbf{c)}\ n = \frac{100z}{ap};$$

II. aus $s = \frac{a}{100}(100 + np)$ erhält man:

$$\textbf{a)}\ a = \frac{100s}{100+np}, \quad \textbf{b)}\ p = \frac{100}{an}(s-a), \quad \textbf{c)}\ n = \frac{100}{ap}(s-a).$$

Zuſ. 2. Frägt es ſich, wie lange ein Kapital a zu einfachen Zinſen ausſtehen muß, damit es m mal ſo groß werde, ſo erhält man (nach Zuſ. 1, Nr. II., c), wenn man s = ma ſetzt:

$$n = \frac{100}{ap}(ma - a) = \frac{100}{p}(m - 1)\ ,\ \text{d. h.?} -$$

Anm. Aus dem letzten Ausdrucke iſt zugleich erſichtlich, daß die Vervielfachung eines Kapitals nicht von dieſem, ſondern nur von der Höhe der Prozente abhängt.

§. 292.

Aufg. Die Summe (s) zu ermitteln, zu welcher ein auf Zinſeszinſen angelegtes Kapital in einer gegebenen Anzahl von Jahren anwächſt.

Aufl. Iſt a das Kapital, p die Prozente, n die Anzahl der Jahre, ſo erhält man

$$s = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = a(1 + 0{\cdot}01p)^n\ .$$

Bew. Die Zinſen des Kapitales a ſind am Schluſſe des erſten Jahres $\frac{ap}{100}$, ſomit Kapital und Zinſen, oder

$$s_1 = a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a(1 + 0{\cdot}01p)\ .$$

Dieſe Summe iſt nun das für das zweite Jahr zu verzinſende Kapital, und es wird auf gleiche Weiſe ſammt ſeinen Zinſen

$$s_2 = a(1 + 0{\cdot}01p) + \frac{a(1 + 0{\cdot}01p)\,p}{100}$$
$$= a(1 + 0{\cdot}01p)(1 + 0{\cdot}01p) = a(1 + 0{\cdot}01p)^2\ .$$

Dieſes für das dritte Jahr verzinsliche Kapital wächſt ſammt Zinſen bis zum Schluſſe desſelben auf die nämliche Art zu

$$s_3 = a(1 + 0{\cdot}01p)^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a(1 + 0{\cdot}01p)^3\ .$$

Auf die nämliche Weiſe ergibt ſich die Größe des Stammkapitals am Schluſſe des vierten Jahres, d. i. $s_4 = a(1 + 0{\cdot}01p)^4$, am Schluſſe des fünften Jahres iſt $s_5 = a(1 + 0{\cdot}01p)^5$ u. ſ. w.; daher allgemein am Schluſſe des n^{ten} Jahres $s_n = a(1 + 0{\cdot}01p)^n$.

Iſt z. B. $a = 400$, $p = 4\frac{1}{2}$ und $n = 10$; ſo erhält man $s = 400(1 + 0{\cdot}01 . 4{\cdot}5)^{10} = 400(1 + 0{\cdot}045)^{10} = 400 . 1{\cdot}045^{10}$; daher mit Anwendung der Logarithmen

$$\lg s = \lg 400 + 10 \lg 1{\cdot}045 \,.$$

Nun ist $\lg 400 = 2{\cdot}60206$

$10 \lg 1{\cdot}045 = 0{\cdot}19120$, also

$\lg s = 2{\cdot}79326$; und daher

$s = 621{\cdot}24 \ldots$

Zus. 1. Der Ausdruck $(1 + 0{\cdot}01p)$, d. i. die Summe, zu welcher ein Gulden (Thaler ꝛc.) in einem Jahre anwächst, wird gewöhnlich der **Zinsfuß** genannt. Setzt man (was für die Folge stets geschehen soll) der Abkürzung wegen $1 + 0{\cdot}01p = q$, so erhält man folgende Gleichungen, mittelst welcher sich die Aufgaben über Zinseszinsrechnungen lösen lassen:

I. $s = aq^n$, oder $\lg s = \lg a + n \lg q$;

II. $a = \frac{s}{q^n}$, " $\lg a = \lg s - n \lg q$;

III. $q = \sqrt[n]{\frac{s}{a}}$, " $\lg q = \frac{\lg s - \lg a}{n}$;

IV. $n = \frac{\lg s - \lg a}{\lg q}$.

Ist aus der Formel III. der Werth von q gefunden, so lassen sich die Prozente, d. i. p leicht finden; denn da $1 + 0{\cdot}01p = q$, so ist $p = 100(q - 1)$.

Zus. 2. Frägt es sich, in welcher Zeit ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital auf das m fache anwachse, so hat man nur $s = ma$ zu setzen, und man erhält sodann nach Zus. 2. Formel IV. $n = \lg m : \lg q$ (Siehe Note zu §. 291.).

Zus. 3. Sollen von einem Kapitale nur die Gesammtinteressen (d. i. Zinsen und Zinseszinsen), die es in einer bestimmten Zeit abgeworfen hat, angegeben werden, so erhält man diese offenbar, wenn man von der Anwachsungssumme s das Stammkapital a abzieht, d. h. ihr Betrag ist $= s - a = aq^n - a = a(q^n - 1)$. Bezeichnet man den gesammten Zins mit Z, so ist also $Z = a(q^n - 1)$. Zieht man hievon noch die einfachen n-jährigen Zinsen des Stammkapitals a ab, so erhält man die Zinseszinsen allein.

Anm. Aehnliche Verhältnisse wie bei Zinseszinsen treten auch bei andern Größen ein, z. B. bei der Zunahme der Bevölkerung eines Landes, einer Stadt, dem Holzzuwachse eines Waldes ꝛc.

§. 293.

Aufg. Die Größe (s) eines Kapitals sammt Zinseszinsen zu finden, wenn dasselbe nicht eine ganze Anzahl von Jahren, sondern auch noch einen Jahrestheil anliegt.

Aufl. $s = aq^n\left(1 + \frac{\alpha p}{100\beta}\right)$.

Bew. Nach n ganzen Jahren ist der Werth des Stammkapitals aq^n (§. 292.). Dieses Kapital steht nun aber kein ganzes Jahr mehr auf Zinsen, sondern nur etwa den Theil $\frac{\alpha}{\beta}$ desselben, trägt somit in dieser Zeit $aq^n \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = aq^n \cdot \frac{\alpha p}{100\beta}$ Interessen. Dadurch wird der Werth des Stammkapitals nach Ablauf dieser Zeit, d. i.

$$s = aq^n + aq^n \cdot \frac{\alpha p}{100\beta} = aq^n\left(1 + \frac{\alpha p}{100\beta}\right).$$

§. 294.

Aufg. Die Summe (s) zu finden, zu der ein Kapital in bestimmter Zeit anwächst, wenn die Zinsen halbjährig zum Kapitale geschlagen werden.

Aufl. Bezeichnet a das zu p % angelegte Kapital, n die Anzahl der Jahre, so ist

$$s = a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right)^{2n} = a\left(\frac{100 + \frac{1}{2}p}{100}\right)^{2n}.$$

Bew. Die ganzen Jahreszinsen von dem Kapital a sind $\frac{ap}{100}$, somit treffen auf das halbe Jahr die Hälfte davon, d. i. $\frac{ap}{100} \cdot \frac{1}{2} = a \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{100}$. Demnach ist a am Schlusse des ersten Halbjahres angewachsen auf $a + a \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{100} = a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right)$.

Die Zinsen dieser letztern Summe, welche sich für das zweite Halbjahr verinteressiren, sind auf gleiche Weise: $a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{100}$; somit Kapital und Zinsen, d. i. der Werth (s') des Stammkapitals am Schlusse des ersten Jahres:

$$s' = a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right) + a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{100} = a\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right)^2.$$

Läßt man nun diese Summe n Jahre lang auf Zinseszinsen liegen, so wächst dieselbe an zur Summe:

$$s = a\left[\left(1 + \frac{\frac{1}{2}p}{100}\right)^2\right]^n = a\left(\frac{100 + \frac{1}{2}p}{100}\right)^{2n}.$$

Werden die Interessen halbjährig zum Kapitale geschlagen, so ist dieß ebenso viel, als wenn letzteres nur zu halb sovielen Prozenten, aber auf doppelt so lange Zeit ausgeliehen wäre.

Zus. Auf gleiche Weise erhält man für die Anwachsungssumme eines Kapitals

a) bei vierteljähriger Verzinsung: $s = a\left(\frac{100 + \frac{1}{4}p}{100}\right)^{4n}$,

b) bei monatlicher Verzinsung: $s = a\left(\frac{100 + \frac{1}{12}p}{100}\right)^{12n}$.

Anm. Die halbjährige Verzinsung findet manchesmal bei Sparkassen statt.

§. 295.

Aufg. Den Betrag (s) zu finden, der aus einem Kapitale wird, wenn dasselbe am Schlusse eines jeden Jahres um eine bestimmte Summe vermehrt oder vermindert wird.

Aufl. Ist a das Stammkapital, b die jährlich zugelegte oder weggenommene Summe, n die Anzahl der Jahre, q der Zinsfuß, so ist

$$s = aq^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Bew. Das Stammkapital a ist am Schlusse des ersten Jahres sammt seinen Zinsen $= aq$; somit wird durch die Summe b für das zweite Jahr verzinslich $aq \pm b$, welche bis zum Schlusse desselben anwächst zu $(aq \pm b)q = aq^2 \pm bq$.

Für das dritte Jahr ist ferner zu verzinsen $aq^2 \pm bq \pm b$, welche Summe bis am Schlusse dieses Jahres den Werth $(aq^2 \pm bq \pm b)q = aq^3 \pm bq^2 \pm bq$ erhält, der nebst $\pm b$ das für das vierte Jahr zu verzinsende Kapital ist.

Am Schlusse des vierten Jahres hat man $aq^4 \pm bq^3 \pm bq^2 \pm bq$; somit für das fünfte Jahr zu verzinsen $aq^4 \pm bq^3 \pm bq^2 \pm bq \pm b$ u. s. f.

Auf diese Weise fortfahrend erhält man für n Jahre als gesuchtes Resultat:

$$s = aq^n \pm bq^{n-1} \pm bq^{n-2} \pm \ldots\ldots \pm bq \pm b$$
$$= aq^n \pm (b + bq + \ldots\ldots + bq^{n-2} + bq^{n-1})$$
$$= aq^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q - 1} \text{ (§. 279.)},$$

da der in Klammern stehende Ausdruck eine geometrische Progression bildet, deren erstes Glied b, letztes Glied bq^{n-1} und Quotient q ist.

Z. B. Es sei a = 1000, eine jährliche Zulage b = 400, n = 8 und p = 4, also q = 1 + 0·01p = 1·04; so wird

$$s = 1000 . 1{\cdot}04^8 + \frac{400(1{\cdot}04^8 - 1)}{1{\cdot}04 - 1}$$
$$= 1000 . 1{\cdot}04^8 + 10000(1{\cdot}04^8 - 1)$$
$$= 11000 . 1{\cdot}04^8 - 10000 = 5053{\cdot}5 .$$

Zus. 1. Ist bei der Vermehrung eines Kapitals durch Zulage die jährlich zugelegte Summe dem Stammkapitale gleich, d. i. b = a, so erhält man

$$s = aq^n + \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1} .$$

Zus. 2. Soll ein Kapital (eine Schuld) durch jährliche Wegnahme (Abtragung) der Summe b in n Jahren getilgt werden, so muß s = 0 sein, und die Formel der Aufgabe verwandelt sich in folgende: $aq^n = \frac{b(q^n - 1)}{q - 1}$.

Es versteht sich von selbst, daß in diesem Falle b größer sein muß, als die einfachen Jahreszinsen des Kapitals a.

Zus. 3. Wird die Summe b am Schlusse des letzten Jahres nicht mehr zugelegt oder weggenommen, so ergibt sich

$$s = aq^n \pm \frac{bq(q^{n-1} - 1)}{q - 1} .$$

Zus. 4. Erfolgt die Zulage oder Wegnahme der Summe b nicht am Schlusse, sondern am Anfange eines jeden Jahres, so wird

$$s = aq^n \pm \frac{bq(q^n - 1)}{q - 1} .$$

§. 296.

Aufg. Den Betrag (s) zu ermitteln, den ein auf Zinseszinsen angelegtes Kapital in n Jahren gibt, wenn dasselbe erst jedem m^{ten} Jahre um eine bestimmte andere Summe vermehrt oder vermindert wird.

Aufl. Ist a das Stammkapital, b die terminweise gemachte Zulage oder Wegnahme, so ist

$$\text{I.}\quad s = aq^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q^m - 1}, \quad \text{wenn } n : m \backsim gZ;$$

$$\text{II.}\quad s = aq^n \pm \frac{b(q^\nu - 1)q^\alpha}{q^m - 1}, \quad \text{wenn } n = \nu + \alpha, \text{ und } \nu : m \backsim gZ.$$

Bew. I. Das Stammkapital wird in n Jahren aq^n; die erste Summe b, welche m Jahre weniger, also n — m Jahre anliegt, wird bq^{n-m}; das zweite b, welches nur n — 2m Jahre verzinst wird, gibt bq^{n-2m} u. s. w.; die im letzten Jahre hinzukommende Summe b bleibt unverändert. Es ist daher:

$$\begin{aligned} s &= aq^n \pm bq^{n-m} \pm bq^{n-2m} \pm \ldots\ldots \pm bq^m \pm b \\ &= aq^n \pm (b + bq^m + \ldots\ldots + bq^{n-2m} + bq^{n-m}) \\ &= aq^n \pm \frac{b(q^n - 1)}{q^m - 1} \ (\text{§. 279.}); \end{aligned}$$

da die eingeschlossene Reihe eine geometrische Progression ist, die b als erstes, bq^{n-m} als letztes Glied, und q^m als Quotienten hat.

II. Ist n nicht durch m theilbar, so kann man $n = \nu + \alpha$ setzen, worin ν ein Vielfaches von m ist, und man hat dann (vermöge Nr. I.) den Werth (s') des Ganzen nach ν Jahren, oder

$$s' = aq^\nu \pm \frac{b(q^\nu - 1)}{q^m - 1}.$$

Diese Summe liegt aber noch α Jahre auf Zinseszinsen, wird daher im Laufe dieser Zeit $= s'q^\alpha$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} s = s'q^\alpha &= \left(aq^\nu \pm \frac{b(q^\nu - 1)}{q^m - 1}\right) q^\alpha \\ &= aq^{\nu+\alpha} \pm \frac{b(q^\nu - 1)q^\alpha}{q^m - 1} \\ &= aq^n \pm \frac{b(q^\nu - 1)q^\alpha}{q^m - 1}. \end{aligned}$$

Z. B. Jemand kann 2000 fl. zu $3\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen

unterbringen, läßt sich aber alle 2 Jahre 300 fl. zurückbezahlen; was kann er nach 12 Jahren auf einmal fordern?

Es ist hier $a = 2000$, $b = 300$, $n = 12$, $m = 2$ und $p = 3\cdot5$, also $q = 1\cdot035$; daher

$$s = 2000 . 1\cdot035^{12} - \frac{300(1\cdot035^{12} - 1)}{1\cdot035^2 - 1}.$$

Man findet $1\cdot035^{12} = 1\cdot511$, also $1\cdot035^{12} - 1 = 0\cdot511$, ferner $1\cdot035^2 - 1 = 0\cdot0712$; daher wird $s = 896$ fl.

II. Kap. Von der Disconto- und Rentenrechnung.

§. 297.

Erkl. 1. Von einem Kapitale, das vertragsmäßig nach einer bestimmten Zeit heimbezahlt werden muß, sagt man, es sei nach Ablauf dieser Zeit (dieses Termines) fällig oder zahlbar.

2. Den Werth, welchen ein nach bestimmter Zeit zahlbares Kapital gegenwärtig hat, nennt man den Baarwerth desselben.

3. Ein erst später fälliges Kapital sich vor der Verfallzeit heimbezahlen lassen, heißt dasselbe anticipiren, und die Bestimmung des Baarwerthes (den das Kapital im Augenblicke der Vorausbezahlung hat) discontiren.

4. Der Abzug, welchen sich derjenige, der ein Kapital anticipirt, von Seite seines Schuldners gefallen lassen muß, wird überhaupt Disconto genannt, bei einfachen Zinsen auch Rabatt (Abzug, Nachlaß), bei zusammengesetzten gewöhnlich Interusurium (Zwischenzins).

5. Das Disconto ist gleich der Zinsensumme, welche ein Kapital vom Augenblicke der Heimbezahlung bis zur Verfallzeit trägt, wenn es von dem Anticipirenden sogleich wieder ausgeliehen wird; also gleich dem Unterschiede zwischen dem Werthe, den das Kapital bei seiner Verfallzeit hat, und dessen Baarwerthe.

6. Das Disconto wird gewöhnlich nach Prozenten bestimmt.

§. 298.

Aufg. Den Abzug zu bestimmen, der von einer erst nach bestimmter Zeit zahlbaren Summe gemacht werden darf, wenn dieselbe anticipirt wird.

Aufl. Bezeichnet d das gesuchte Disconto, s die zu bezahlende Summe, n die Anzahl der Jahre, nach denen s fällig ist, p die Prozente, zu denen discontirt wird, und ist $q = 1 + 0{\cdot}01p$ also $p = 100(q-1)$, so erhält man

$$\text{I.}\quad d = \frac{nps}{100+np} = \frac{s.n(q-1)}{1+n(q-1)} \text{ bei einfachen Zinsen;}$$

$$\text{II.}\quad d = \frac{s}{q^n}(q^n - 1) = s\left(1 - \frac{1}{q^n}\right) \text{ bei Zinseszinsen.}$$

Bew. Ist a der Baarwerth der nach n Jahren fälligen Summe s, so ist offenbar $d = s - a$ (§. 297, 5.). Die Bestimmung des Baarwerthes ergibt sich aus der Beantwortung der Frage: Welches Kapital muß n Jahre lang anliegen, bis es bei p % zur Summe s anwächst?

Bei einfachen Zinsen ist nun aber (§. 291.):

$$s = \frac{a}{100}(100 + np)\text{, daher } a = \frac{100s}{100+np};$$

bei Zinseszinsen hat man (nach §. 292.):

$$s = a(1 + 0{\cdot}01p)^n = aq^n\text{, mithin } a = s : q^n.$$

Substituirt man diese Werthe von a in die Gleichung $d=s-a$, so ergeben sich die oben aufgestellten Formeln.

Es sei z. B. $s = 8000$ fl., $n = 6$, $p = 5\%$, so wird

1) bei Discontirung nach einfachen Zinsen:

$$d = \frac{6.5.8000}{100+6.5} = \frac{30.8000}{130} = \frac{24000}{13} = 1846{\cdot}154 \text{ fl. (beinahe);}$$

2) bei Zinseszinsen erhält man für $1 : q^n = 1 : 1{\cdot}05^6$:

$$\lg(1 : 1{\cdot}05^6) = -6 \lg 1{\cdot}05 = -0{\cdot}12714 = 0{\cdot}87286 - 1$$
$$= \lg 0{\cdot}7462\text{; also wird}$$

$$d = 8000(1 - 0{\cdot}7462) = 8000.0{\cdot}2538 = 2030{\cdot}4 \text{ fl.}$$

Bei der Discontirung nach Zinseszinsen ist es bequemer den Baarwerth mittelst Logarithmen zu berechnen, und das Resultat von der Summe s abzuziehen.

Zus. Ist n eine gebrochene Zahl, so kann bei dem einfachen Disconto die angegebene Formel unmittelbar angewendet werden, bei dem zusammengesetzten dagegen ist dann der Baarwerth nach §. 293. zu bestimmen.

§. 299.

Erkl. 1. Eine Summe Geldes, die Jemand von einem andern, der sein Schuldner ist, in bestimmten gleichen Terminen (gewöhnlich jährlich) bezieht, bis ein dem letztern dargeliehenes Kapital sammt seinen Zinsen getilgt ist, nennt man eine Rente.

Das Kapital, welches gegeben wird, um sich den Genuß einer Rente zu erwerben, heißt die Mise (Einsatz, Aktie); derjenige, welcher die Mise erhält, also die Rente auszubezahlen hat, wird der Entrepreneur (Unternehmer), und jener, der die Mise gibt und die Rente bezieht, der Rentner oder Rentirer (Rentenier) genannt.

2. Die Beantwortung der verschiedenen Rechnungsfragen, die in Bezug auf Renten, deren Dauer und die hiezu erforderliche Mise gestellt werden können, machen den Gegenstand der Rentenrechnung aus.

3. Die Renten sind zweifacher Art:

a) Jahresrenten, Zeitrenten oder Annuitäten, wenn sie so lange fortdauern, bis die Mise getilgt ist;

b) Leib- oder Lebensrenten, welche mit dem Tode des Rentners aufhören. Man betrachtet sie als Zeitrenten, für welche so viele Jahre angenommen werden, als der Rentner noch zu durchleben Wahrscheinlichkeit hat, was aus sogenannten Mortalitätstabellen*) entnommen wird.

Anm. Die Rentenrechnung findet auch Anwendung bei Wittwen- und Waisenkassen, bei Heirathsverträgen u. s. w. und man pflegt dabei fast immer Zinseszinsen stattfinden zu lassen.

§. 300.

Aufg. Eine allgemeine Formel für die Rentenrechnung zu entwickeln (wenn Zinseszinsen dabei stattfinden).

---

*) Solche sind von Süßmilch, Duvillard, Deparcieux &c. Sie enthalten in ihrer einfachsten Gestalt eine durch vieljährige Vergleichung der Sterberegister verschiedener Orte gewonnene Angabe, wie viele von einer gewissen Anzahl gleichzeitig geborener Menschen in den einzelnen auf einander folgenden Jahren noch leben.

Aufl. Bezeichnet a die Mise, r die Rente, q den Zinsfuß und n die Anzahl der Jahre, so erhält man die Formel:

$$aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Bew. Der Betrag jeder einzelnen Rente ist als ein dem Rentner ausbezahltes Kapital zu betrachten, das er auf Zinseszinsen ausleihen kann. Thut er dieses, so verinteressirt sich die am Schlusse des ersten Jahres erhaltene erste Rente r noch (n—1) Jahre lang, wächst also bis zum Schlusse des n^{ten} Jahres auf rq^{n-1} an. Die Rente des zweiten Jahres kann er (n—2) Jahre ausleihen; sie wird also bis zum Ende des n^{ten} Jahres rq^{n-2} u. s. f. Die Rente des vorletzten Jahres trägt noch im letzten (d. i. n^{ten}) Jahre Zinsen, ist also am Schlusse desselben rq. Die Rente des letzten Jahres trägt keine Zinsen mehr, bleibt also r. Die Summe aller Renten ist sonach am Schlusse des n^{ten} Jahres:

$$r + rq + \ldots\ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1} = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \text{ (§. 279.)}.$$

Der Werth der Mise am Schlusse des n^{ten} Jahres ist aber aq^n; und da beide (der Werth der Mise und der aller Renten) offenbar nach Ablauf dieser Zeit gleich sein müssen, so hat man:

$$aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}. \text{ (Vgl. §. 295, Zus. 2.)}$$

Von den in dieser Gleichung vorkommenden Größen a, r und n kann jede unbekannt sein, wenn die beiden andern gegeben sind.

Z. B. Welche Rente kann man sich mit 12000 fl. auf 20 Jahre bei 4 % Verzinsung erwerben?

Es ist hier $a = 12000$, $n = 20$ und $p = 4$, also $q = 1{\cdot}04$; folglich

$$12000 . 1{\cdot}04^{20} = \frac{r(1{\cdot}04^{20} - 1)}{1{\cdot}04 - 1} = \frac{r(1{\cdot}04^{20} - 1)}{0{\cdot}04}, \text{ oder}$$

$$480 . 1{\cdot}04^{20} = r(1{\cdot}04^{20} - 1).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \log 480 &= 2{\cdot}68124 \\ 20 \lg 1{\cdot}04 &= 0{\cdot}34060 \\ \text{Erg.} \lg(1{\cdot}04^{20} - 1) &= 0{\cdot}92417 - 1 \text{ ; folglich} \\ \hline \lg r &= 2{\cdot}94601 \text{ ; und daher} \\ r &= 883{\cdot}1 \text{ fl.} \end{aligned}$$

Zus. 1. Wird eine Rente nicht am Schluße, sondern am Anfange eines jeden Jahres bezogen (vorschußliche oder vorschußweise Rente), so ergibt sich

$$aq^n = \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1} \text{ oder } aq^{n-1} = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1};$$

denn es kann in diesem Falle die erste Rente n Jahre, die letzte noch ein Jahr angelegt werden.

Zus. 2. Soll eine erst nach n Jahren fällige Summe s in eine jährliche Rente verwandelt werden, die am Schlusse jedes Jahres zahlbar ist, so hat man, da hier die Summe aller Renten = s sein muß:

$$s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Zus. 3. Gibt Jemand eine Mise a auf n Jahre unter der Bedingung, daß die erste Rente erst am Schlusse des m^{ten} Jahres, dann aber alle Jahre regelmäßig, bis zum Schlusse des n^{ten}, zu entrichten ist, so wird

$$aq^n = \frac{r(q^{n-m+1} - 1)}{q - 1}.$$

Zus. 4. Wird eine Rente nicht jährlich, sondern in andern Terminen, z. B. am Schlusse von je m Jahren ausbezahlt, so dient für Berechnungen die Formel des §. 296, in welcher $s = 0$ ist, nämlich

$$aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q^m - 1}, \text{ wenn } n : m \backsim gZ.$$

Zus. 5. Frägt es sich, auf wie viele Jahre man vom n^{ten} angefangen sich eine Rente r erwerben kann, wenn man n Jahre lang jährlich einen Beitrag a in eine Kasse gemacht hat, so erhält man

$$\frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \cdot q^x = \frac{r(q^x - 1)}{q - 1}, \text{ oder } a(q^n - 1) \cdot q^x = r(q^x - 1);$$

denn der jährliche Beitrag a gibt in n Jahren die Summe $\frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, welche der Kasse noch bis zum x^{ten} Jahre Zinsen trägt.

Z. B. Jemand hat 30 Jahre lang in eine Wittwenkasse jährlich 20 fl. eingelegt; wie lange kann dann, ohne Nachtheil der Wittwe, die Kasse eine Jahresrente von 100 fl. bezahlen, wenn zu 4% verzinst wird?

Aus der Gleichung $20(1{\cdot}04^{30}-1).1{\cdot}04^x = 100(1{\cdot}04^x - 1)$ erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$x = \frac{\lg 5 - \lg(6 - 1{\cdot}04^{30})}{\lg 1{\cdot}04} = 15{\cdot}178 \text{ Jahre.}$$

Zus. 6. Aus den Formeln der Aufg. und des Zus. 4., nämlich

$$aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{und} \quad aq^n = \frac{r(q^n - 1)}{q^m - 1} \text{ folgt}$$

$$a = \frac{r}{q-1}.\left(1 - \frac{1}{q^n}\right) \quad " \quad a = \frac{r}{q^m - 1}.\left(1 - \frac{1}{q^n}\right).$$

Setzt man nun $n = \infty$, d. h. soll der Baarwerth einer nie aufhörenden, sogenannten immerwährenden oder ewigen Rente (r) bestimmt werden, so ist auch $q^n = \infty$, mithin $1 : q^n = 1 : \infty = 0$, und daher

α) in Hinsicht auf eine jährlich zu leistende Zahlung:

$$a = \frac{r}{q-1} = \frac{100r}{p}, \text{ indem } q = 1 + 0{\cdot}01p \text{ ist;}$$

β) in Bezug auf einen in Zeiträumen von je m Jahren zu entrichtenden Betrag

$$a = \frac{r}{q^m - 1}.$$

Diese Fälle finden Anwendung bei der Ablösung von Baulasten, d. i. Uebertragung derselben an die Staatskasse, bei Zehnten, Waldwerthberechnungen ꝛc.

IV. Abschnitt. Die Combinationslehre, Wahrscheinlichkeitsrechnung und der binomische Lehrsatz.

I. Kap. Combinationslehre.

§. 301.

Erkl. 1. Eine Verbindung oder Zusammenstellung beliebig gegebener Dinge nach bestimmten Gesetzen wird eine Complexion oder eine Gruppe genannt. Jedes einzelne Ding, d. i. jeder einzelne Bestandtheil einer Complexion heißt ein Element derselben.

2. Zur Bezeichnung der Elemente bedient man sich gewöhnlich der Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabetes oder der arabischen Ziffern in der Art, daß dieselben nicht gleichartige Größen oder Zahlen bezeichnen, sondern nur anzeigen, welche Stellen die entsprechenden Elemente in einer Complexion einnehmen, weßhalb man sie auch Zeiger oder Indices nennt.

3. Die Elemente einer Complexion werden in niedere und höhere eingetheilt, je nachdem sie einen kleinern oder größern Zeiger haben, wenn als solche die Buchstaben in alphabetischer Ordnung oder die Ziffern in ihrer natürlichen, wachsenden Reihenfolge gebraucht werden.

§. 302.

Erkl. 1. Eine Complexion heißt in Hinsicht auf die Stellung ihrer Elemente gut- oder wohlgeordnet, wenn in derselben kein niederes Element auf ein höheres folgt.

2. In Rücksicht auf die Elemente an und für sich unterscheidet man a) Complexionen ohne Wiederholungen, wenn alle Elemente verschieden sind, und b) Complexionen mit Wiederholungen, wenn eines oder mehrere derselben öfter vorkommen. In diesem Falle pflegt man auch jedes der öfter vorhandenen Elemente nur einmal anzuschreiben, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft es stehen darf oder soll, durch einen rechts darüber gesetzten Exponenten anzudeuten, welcher Wiederholungsexponent genannt wird.

3. In Beziehung auf die Anzahl der Elemente heißt eine Complexion von der sovielten Klasse, als sie Elemente enthält. Complexionen der ersten Klasse werden Unionen, der zweiten Binionen oder Amben, der dritten Ternionen, der vierten Quaternionen, der fünften Quinionen u. s. f. genannt.

§. 303.

Erkl. Werden zwei oder mehrere Complexionen auf einander bezogen, so unterscheidet man

1. hinsichtlich des Ranges höhere und niedere Complexionen, und zwar heißt jene die höhere, in welcher an einer frühern Stelle (von der Linken gegen die Rechte) ein höheres Element sich befindet;

2. bezüglich der Aufeinanderfolge nennt man Complexionen gut geordnet, wenn nie eine höhere einer niedern vorangeht;

3. in Hinsicht auf die Anzahl der Elemente heißen Complexionen von derselben Klasse, wenn sie aus gleichvielen Elementen bestehen. Complexionen derselben Klasse, welche das nämliche Anfangselement haben, werden überdieß Gruppen derselben Ordnung genannt;

4. in Rücksicht auf die Beschaffenheit der Elemente heißen Complexionen a) identisch, wenn sie die nämlichen Elemente in der nämlichen Ordnung enthalten, b) formell verschieden, wenn sie aus denselben Elementen, nur in verschiedener Aufeinanderfolge bestehen, und c) materiell verschieden, wenn nicht gleichviele oder nicht dieselben Elemente vorkommen.

§. 304.

Erkl. 1. Aus gegebenen Elementen Complexionen auf bestimmte Weise bilden, heißt Combiniren (im weitern Sinne des Wortes).

2. Die Lehre von den Gesetzen, nach welchen aus gegebenen Elementen unter vorgeschriebenen Bedingungen Complexionen gebildet werden können, nennt man Combinationslehre, Combinatorik oder Syntaktik.

3. Die verschiedenen Arten, gegebene Elemente nach den Regeln der Syntaktik zu combiniren, werden combinatorische oder syntaktische Operationen genannt.

4. Man unterscheidet drei combinatorische Grundoperationen: das Permutiren, das Combiniren (im engern Sinne) und das Variiren.

5. Jede der syntaktischen Operationen hat zwei Hauptaufgaben: nämlich für gegebene Elemente a) ein Gesetz der Aufstellung aller Complexionen zu entwickeln, und dieselben anschaulich (schriftlich) darzustellen, und b) durch allgemeine Formeln die Anzahl aller möglichen Complexionen zu bestimmen.

A. Vom Permutiren.

§. 305.

Erkl. 1. **Permutiren** oder **Versetzen** heißt gegebene Elemente so oft als möglich in einer andern Ordnung an einanderreihen, oder auf alle nur möglichen Weisen zusammenstellen.

2. Jede von den durch das Permutiren erhaltenen Complexionen wird eine **Permutation** oder **Permutationsform**, und die Anzahl aller Permutationen die **Permutationszahl** der gegebenen Elemente genannt.

3. Je nachdem alle Elemente verschieden oder einige davon identisch sind, unterscheidet man Permutationen **ohne** und solche **mit Wiederholungen**.

4. Die Aufgabe, daß eine Anzahl (n) von Elementen (abcd...) permutirt werden soll, wird durch P(n) oder P(abcd...); dagegen die Permutationszahl derselben durch NP(n) oder NP(abcd...) angedeutet, wobei N „Numerus" bedeutet.

Zus. Durch Permutiren erhält man bloß formell verschiedene Complexionen (§. 303, Nr. 4. c).

§. 306.

Aufg. Gegebene Elemente **ohne** Wiederholung zu permutiren, d. h. alle formell verschiedenen Complexionen derselben gut geordnet darzustellen.

Aufl. Man suche, um aus den gegebenen Elementen als der niedrigsten Complexion die zweite, und so aus jeder niedrigern die nächst höhere abzuleiten, von der Rechten gegen die Linke gehend, das erste niedere Element, welches vor einem höhern steht, setze an seine Stelle das nächst höhere von den zur Rechten befindlichen, und lasse, indem die Elemente zur Linken unverändert bleiben, die zur Rechten in natürlicher Ordnung folgen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird man schlüßlich auf eine Permutation kommen, auf die sich dasselbe nicht mehr anwenden läßt. Diese ist die höchste und letzte Complexion, und enthält die gegebenen Elemente in umgekehrter Ordnung. Demnach erhält man z. B.

$$P(1234) = \begin{cases} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1243 & 2143 & 3142 & 4132 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \\ 1342 & 2341 & 3241 & 4231 \\ 1423 & 2413 & 3412 & 4312 \\ 1432 & 2431 & 3421 & 4321 \, . \end{cases}$$

Betrachtet man diese Complexionen als vierziffrige dekadische Zahlen, so sieht man, daß jede von ihnen größer ist, als alle einzelnen ihr vorangehenden, und daß also die Complexionen gut geordnet sind.

Zus. Vermittelst obiger Regel läßt sich also unmittelbar, wenn irgend eine Permutationsform von Elementen gegeben ist, die nächstfolgende angeben. So wird z. B. zu 14532 die nächst höhere Complexion 15234 sein.

§. 307.

Aufg. Gegebene Elemente mit Wiederholungen zu permutiren.

Aufl. Ganz wie §. 306. Diejenigen (identischen) Permutationsformen, welche nur durch Vertauschung derselben (identischen) Elemente entstünden, wenn dieselben verschieden wären, fallen durch das angegebene Verfahren von selbst weg. Z. B. für P(abccc) = P(abc^3) erhält man:

$$P(abc^3) = \begin{cases} abccc & baccc & cabcc & cbcac & ccbac \\ acbcc & bcacc & cacbc & cbcca & ccbca \\ accbc & bccac & caccb & ccabc & cccab \\ acccb & bccca & cbacc & ccacb & cccba \, . \end{cases}$$

§. 308.

Lehrs. Die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung für n gegebene Elemente ist gleich der Fakultät von n, d. h. gleich dem Produkte der in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen von 1 bis n.

Thes. $NP(n) = 1.2.3.4 \ldots . (n-1).n = n!$ *)

Bew. Ein einziges Element läßt auch nur eine Stellung zu, d. h. es ist NP(1) = 1. Kommt aber noch ein zweites Element hinzu, so kann dieses entweder nach oder vorausgesetzt wer-

*) Man pflegt die Fakultät einer Zahl n, d. i. das Produkt 1.2.3.4....n (auch die n^{te} Faktorielle von 1 genannt) kurz durch n! zu bezeichnen.

den; zwei Elemente geben somit $2 = 1.2$ Permutationen, oder es ist $NP(2) = 1.2 = 2!$. Wenn nun überhaupt für $(n-1)$ Elemente $NP(n-1) = (n-1)!$ ist, und es kommt noch ein n^{tes} Element dazu, so kann dasselbe in jeder der vorigen aus $n-1$ Elementen bestehenden Permutationen die erste bis zur letzten Stelle einnehmen, wodurch man aus jeder n neue Versetzungen erhält. Es ist mithin

$$NP(n) = (n-1)!\,n = 1.2.3 \ldots . (n-1).n = n!$$

Z. B. mit den Ziffern 1, 2, 3 . . 9, lassen sich

$$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362880$$

verschiedene neunziffrige Zahlen schreiben.

Zus. 1. Sollen mehrere Elemente in der Art permutirt werden, daß eines oder einige derselben immer eine bestimmte Stelle einnehmen, so ist dieß ebensoviel, als ob die letztern gar nicht vorhanden wären. Wenn z. B. in $P(abc_3de)$ das Element c immer in der Mitte stehen, also die dritte Stelle (c_3) einnehmen soll, so ist

$NP(abc_3de) = 1.2.3.4 = 24$. Ebenso ist

$NP(axbyc) = 1.2.3 = 6$, wenn nur abc, nicht aber x und y als permutabel angenommen werden.

Hiernach läßt sich auch angeben, wie viele Permutationsformen aus gegebenen Elementen ein oder einige derselben an einer bestimmten Stelle (z. B. als Anfangselement) haben werden. So wird z. B. in dem Worte „Veritas" jeder Buchstabe in den 5040 möglichen Permutationen 720mal an jeder Stelle stehen.

Zus. 2. Werden zwei (oder mehrere) Partien von Elementen in eine solche Beziehung gesetzt, daß die Elemente einer jeder wohl unter sich, nicht aber die verschiedener Partien permutirt werden können; so ist die Permutationszahl gleich dem Produkte aus den Fakultäten der Elementenanzahl einer jeden Partie. Denn es kann dann jede Permutationsform der einen Partie mit jeder der andern zusammengestellt werden. — Hat man z. B. P(abcd, xyz), und es sollen xyz immer die drei letzten Stellen einnehmen, so wird

$$NP(abcd, xyz) = 4!\,3! = 1.2.3.4.1.2.3 = 144 .$$

Anm. Die durch Buchstabenversetzung aus einem Worte oder Satze gebildeten neuen Wörter oder Sätze nennt man Anagramme. So erhält man z. B. aus Roma die Worte ramo, Omar, mora, Maro, armo, amor.

§. 309.

Lehrs. Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung ist gleich der Fakultät der Summe sämmtlicher Wiederholungsexponenten (1 mitgezählt), getheilt durch das Produkt der Fakultäten der einzelnen Exponenten.

Thes. $NP(1^m 2^n 3^p \ldots) = \frac{(m+n+p+\ldots)!}{m!\,n!\,p!\ldots}$.

Bew. Die Summe aller Wiederholungsexponenten ist offenbar gleich der Anzahl der Elemente. Wären nun diese alle unter sich verschieden, so wäre (nach §. 308.) ihre Permutationszahl $(m+n+p\ldots.)! = S!$ (wenn man $m+n+p\ldots. = S$ setzt). Befinden sich nun unter diesen Elementen m gleiche, so werden jene Permutationen die nämlichen sein, die sich nur durch die veränderte Ordnung dieser m Elemente unterscheiden, deren Anzahl $m!$ ist. Es bleiben somit nur noch $S!:m!$ verschiedene Permutationen. Ebenso findet man, daß die Permutationszahl $S!:(m!n!)$ sei, wenn nebst den m gleichen noch n andere einander gleiche Elemente sich finden; ferner, daß sie $S!:(m!n!p!\ldots)$ wird, wenn noch mehrere Gruppen unter sich gleicher Elemente vorhanden sind. Es ist z. B.

$$NP(abccc) = NP(abc^3) = \frac{5!}{3!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = 20 \text{ (vgl. §. 307.).}$$

Bezüglich der Buchstaben des Wortes „Mississippi" hat man

$$NP(mi^4s^4p^2) = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.1.2.3.4.1.2} = 34650,$$

während 11 verschiedene Elemente 39916800 Permutationen geben.

Zus. Die Zuss. 1. und 2. des §. 308. haben auch bei Permutationen mit Wiederholungen ihre Geltung. So ist z. B. mit Bezug auf §. 308, Zus. 2.

$$NP(a^2b^3c\,,\,x^4yz^2) = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} \cdot \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.1.2} = 60.105 = 6300.$$

B. Vom Combiniren.

§. 310.

Erkl. 1. Combiniren (im engern Sinne) oder Verbinden heißt alle gut geordneten Complexionen darstellen, welche

mit einer bestimmten Anzahl gegebener Elemente entweder überhaupt oder für eine gewisse Bedingung gemacht werden können.

2. Jede der erhaltenen Complexionen wird eine Combination oder Combinationsform genannt, die Menge der zu einer Combination zusammengestellten Elemente heißt die Combinationsklasse, die diese Menge angebende Zahl der Klassenexponent, und die Anzahl aller Combinationen für eine bestimmte Klasse die Combinationszahl.

3. Die Combinationen der ersten Klasse (Unionen) nennt man auch Auszüge (Extrakte), die der zweiten gewöhnlich Amben, die der dritten Ternen, die der vierten Quaternen und die der fünften Quinternen oder auch Quinten.

4. Man unterscheidet Combinationen ohne und solche mit Wiederholungen, je nachdem eine jede Complexion dasselbe Element nur einmal oder so oft enthalten darf, als der Klassenexponent Einheiten enthält.

5. Daß gegebene Elemente (123 ... n) zu einer bestimmten Klasse (m) combinirt werden sollen, wird a) bei Combinationen ohne Wiederholung durch $C^m(123\ldots n)$ oder nur $C^m(n)$, dagegen b) bei solchen mit Wiederholung durch $C_w^m(123\ldots n)$ oder $C_w^m(n)$ angedeutet. Ebenso wird die Combinationszahl einer bestimmten Klasse bezeichnet, nur wird noch N (= Numerus) vorgesetzt.

Zus. Durch das Combiniren erhält man materiell verschiedene Complexionen (vgl. §. 305, Zus.).

§. 311.

Aufg. Alle möglichen Combinationen für gegebene Elemente ohne Wiederholung gut geordnet zu bilden.

Aufl. Man schreibe zunächst die einzelnen Elemente in ihrer natürlichen Ordnung an; so hat man die Combinationen der ersten Klasse oder die Unionen, d. i. $C^1(n)$. Um aus dieser die Amben, und dann jedesmal aus einer eben erhaltenen die nächstfolgende Klasse zu bilden, setze man jedes Element vor alle jene Complexionen der nächstvorhergehenden Klasse, welche mit einem höhern Elemente anfangen, und fahre auf diese Art solange fort, bis man zur letzten, d. i. jener Klasse gelangt, welche alle Elemente enthält.

Z. B. für 5 Elemente abcde ergibt sich:

$$1)\quad C^1(abcde) = a \quad b \quad c \quad d \quad e$$

$$2)\quad C^2(abcde) = \left\{\begin{array}{llll} ab & bc & cd & de \\ ac & bd & ce & \\ ad & be & & \\ ae & & & \end{array}\right.$$

$$3)\quad C^3(abcde) = \left\{\begin{array}{llll} abc & acd & bcd & cde \\ abd & ace & bce & \\ abe & ade & bde & \end{array}\right.$$

$$4)\quad C^4(abcde) = \left\{\begin{array}{lll} abcd & abde & bcde \\ abce & acde & \end{array}\right.$$

$$5)\quad C^5(abcde) = abcde\,.$$

Zus. Combinirt man ohne Wiederholung, so ist die Anzahl der Klassen begrenzt.

§. 312.

Aufg. Gegebene Elemente überhaupt in gut geordneter Folge mit Wiederholung bis zur m^{ten} Klasse zu combiniren.

Aufl. Man schreibe die gegebenen Elemente in natürlicher Ordnung an, wodurch man die Klasse der Unionen hat, setze dann in Bezug auf sämmtliche folgenden Klassen jedes Element allen jenen Complexionen der vorhergehenden Klasse, die mit keinem niedrigern Elemente beginnen, vor, und fahre solange fort, bis auf diese Weise noch die m^{te} Klasse gebildet ist.

Z. B. für 4 Elemente abcd erhält man:

$$C^1_w(abcd) = a \quad b \quad c \quad d$$

$$C^2_w(abcd) = \left\{\begin{array}{llll} aa & bb & cc & dd \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{array}\right.$$

$$C^3_w(abcd) = \left\{\begin{array}{lllll} aaa & abb & acd & bbd & ccc \\ aab & abc & \underline{add} & bcc & ccd \\ aac & abd & bbb & bcd & \underline{cdd} \\ aad & acc & bbc & \underline{bdd} & ddd \end{array}\right.$$

$$C^4_w(abcd) = \left\{ \begin{array}{lllll} aaaa & aacc & abcd & bbbc & bcdd \\ aaab & aacd & abdd & bbbd & \underline{bddd} \\ aaac & aadd & accc & bbcc & cccc \\ aaad & abbb & accd & bbcd & cccd \\ aabb & abbc & acdd & bbdd & ccdd \\ aabc & abbd & \underline{addd} & bccc & \underline{cddd} \\ aabd & abcc & bbbb & bccd & dddd \text{ ꝛc.} \end{array} \right.$$

Zus. Die Combinationen mit Wiederholung können beliebig weit fortgesetzt werden, also unbegrenzt sein.

§. 313.

Aufg. Eine beliebige gutgeordnete Combinationsklasse für gegebene Elemente unmittelbar zu bilden, und zwar I. ohne und II. mit Wiederholungen.

Aufl. I. Man setze soviele der niedrigsten Elemente in natürlicher Reihenfolge nebeneinander, als der Klassenexponent gestattet; so hat man die erste (niedrigste) Combinationsform der verlangten Klasse. Um aus dieser successive die übrigen abzuleiten gehe man von der Rechten gegen die Linke, bis man ein Element trifft, das noch nicht das höchste ist, oder dem noch nicht alle höheren folgen, setze für dieses das nächst höhere ein, und besetze die (rechts) darauffolgenden Stellen der Reihe nach mit den nächst höhern Elementen. So wird z. B.

$$C^4(123456) = \left\{ \begin{array}{lllll} 1234 & 1245 & 1345 & 1456 & 2356 \\ 1235 & 1246 & 1346 & 2345 & 2456 \\ 1236 & 1256 & 1356 & 2346 & 3456\,. \end{array} \right.$$

II. Man schreibe das niedrigste Element so oft, als der Klassenexponent Einheiten hat; so ist dieses die erste Complexion. Im Weitern verfährt man ganz wie oben, nur sind die auf das erhöhte Element folgenden Stellen (rechts) mit dem nämlichen Elemente zu besetzen. Z. B.

$$C^3_w(1234) = \left\{ \begin{array}{lllllll} 111 & 114 & 124 & 144 & 224 & 244 & 344 \\ 112 & 122 & 133 & 222 & 233 & 333 & 444 \\ 113 & 123 & 134 & 223 & 234 & 334\,. & \end{array} \right.$$

Zus. Nach vorstehenden Regeln läßt sich, wenn irgend eine Combination von Elementen gegeben ist, die nächstfolgende derselben Klasse angeben. Ist z. B. für die Elemente 1234567 die

Quaterne 1267 gegeben, so hat man als nächstfolgende entweder 1345, wenn ohne, oder 1277, wenn mit Wiederholungen combinirt wird.

§. 314.

Lehrs. Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zur m^{ten} Klasse für n Elemente wird erhalten, wenn man von n die Zahlen 0, 1, 2 . . . (m — 1) abzieht, und das Produkt der erhaltenen Differenzen durch die Fakultät von m dividirt.

Thes. $$NC^m(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Bew. Jedes Element für sich gibt eine Union; also ist die Anzahl der Unionen von n Elementen = n. Verbindet man jedes der n Elemente mit jedem der übrigen (n — 1) Elemente, so erhält man n(n — 1) Complexionen, von denen aber jedesmal zwei dieselben Elemente (permutirt) enthalten, z. B. ab und ba, ac und ca ꝛc.; mithin sind nur die Hälfte derselben Combinationen (§. 302, 1.), und es ist somit die Anzahl der Amben oder

$$NC^2(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Durch die Verbindung der erhaltenen Amben mit jedem der übrigen (n — 2) Elemente erhält man $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ Ternionen, von denen aber wieder jede dreimal vorkommt, z. B. abc, acb und bca; somit ist die Anzahl der gesuchten Ternen, d. i. $NC^3(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Auf dieselbe Weise findet man die Anzahl der Quaternen oder $NC^4(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, u. s. f. Mithin ist allgemein für die m^{te} Combinationsklasse

$$NC^m(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}.$$

Z. B. 1) Die 90 Nummern des gewöhnlichen Lottospieles enthalten $\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$ Amben, während unter den 5 wirklich gezogenen Nummern nur $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ Amben sich befinden.

2) Eine Anzahl von 20 verschiedenen Kugeln lassen sich auf 15504 Arten in 2 Haufen theilen, von denen der eine 5, der andere 15 Kugeln enthält. Denn es ist

$$NC^5(20) = \frac{20 . 19 . 18 . 17 . 16}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = 15504 .$$

So oft aber der eine Haufen 5 Kugeln enthält, befinden sich im andern die übrigen 15 Kugeln.

Zus. Setzt man $m = n$, so wird $NC^n(n) = 1$, d. h. —? (vgl. §. 311, Zus.).

§. 315.

Lehrs. Man erhält die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen zur m^{ten} Klasse für n Elemente, wenn man zu n die Zahlen 0, 1, 2, 3 .... (m — 1) addirt und das Produkt dieser Summen durch die Fakultät von m dividirt.

Thes. $NC_w^m(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)....(n+(m-1))}{1 . 2 . 3 . 4 ..... m}$.

Bew. Die Anzahl der Unionen ist (wie §. 314.) $= n$. Verbindet man nun jedes Element mit allen gegebenen und noch einmal mit sich selbst, so erhält man $n(n+1)$ Complexionen der zweiten Klasse, wovon aber jede zweimal vorkommt (z. B. aa und aa, dann ab und ba 2c.) mithin ist die Anzahl der Amben oder $NC_w^2(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{1 . 2}$.

Wird ferner jede Binion mit allen gegebenen Elementen und überdieß mit den beiden, die sie selbst enthält verbunden, so erhält man $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$ Complexionen, von denen aber je 3 dieselben Elemente permutirt enthalten; es ist somit die Anzahl der Ternen oder $NC_w^3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}$.

Durch dieselbe Betrachtung findet man die Anzahl der Quaternen oder $NC_w^4(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 . 2 . 3 . 4}$, die der Quinternen oder $NC_w^5(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$ 2c.

Daher ist allgemein

$$NC_w^m(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)....(n+(m-1))}{1 . 2 . 3 . 4 ..... m}.$$

Z. B. mit vier Würfeln lassen sich, da $n = 6$ und $m = 4$ ist, $6.7.8.9 : 1.2.3.4 = 126$ verschiedene Würfe machen; mit zwei Würfeln 21, mit drei 56.

Zus. Die Anzahl der Combinationen von n Elementen zur m^{ten} Klasse mit Wiederholung ist gleich der Anzahl der Combinationen von $n + m - 1$ Elementen zur m^{ten} Klasse ohne Wiederholung, d. h.

$$NC_w^m(n) = NC^m(n + m - 1).$$

Die Richtigkeit ergibt sich mittelst der Formeln des Lehrs. und §. 314., indem man in letzterer $n + m - 1$ statt n setzt.

Anm. Die einzelnen Combinationsklaßen, wenn Wiederholung gestattet ist, bilden eine arithmetische Reihe der sovielten Ordnung, als die um 1 verminderte Anzahl der Elemente Einheiten hat.

§. 316.

Erkl. 1. Gegebene Elemente in der Art combiniren, daß die Anzahl, wie oft jedes Element in den einzelnen Complexionen vorkommen darf, bestimmt ist, heißt mit eingeschränkten Wiederholungen combiniren. Es wird dieses durch die den einzelnen Elementen beigesetzten Wiederholungsexponenten angedeutet. Z. B. $C(a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots)$ oder $C(123\ldots)^n$, wenn alle Elemente gleichoft wiederholt werden dürfen.

2. Eine Anzahl von Elementen so combiniren, daß ihre Zeiger zusammen eine bestimmte Summe (Quersumme) geben, heißt dieselben zu der gegebenen Summe oder Quersumme combiniren. Hiebei kann verlangt werden, daß entweder a) alle möglichen Combinationen oder b) nur einzelne Klassen derselben, und in jedem Falle c) ob ohne, oder mit, oder mit eingeschränkten Wiederholungen gebildet werden sollen.

Das Combiniren zu einer bestimmten Quersumme (s) wird gewöhnlich durch ${}^sC$ bezeichnet.

§. 317.

Aufg. Für gegebene Elemente und eine bestimmte Klasse die Combinationsformen mit eingeschränkten Wiederholungen zu bilden.

Aufl. Man schreibe das niedrigste oder soviele der niedrigsten Elemente so oft an, als es der Klassen- und der Wieder-

holungsexponent gestatten, so hat man die erste und niedrigste Combinationsform. Aus dieser werden die übrigen mit Rücksicht auf die Wiederholungsexponenten ganz nach §. 313. abgeleitet. Z. B.

$$1)\quad C^4(1^2 2^4 34) = \begin{cases} 1122 & 1134 & 1224 & 2223 \\ 1123 & 1222 & 1234 & 2224 \\ 1124 & 1223 & 2222 & 2234\,. \end{cases}$$

$$2)\quad C^3(1234)^2 = \begin{cases} 112 & 122 & 133 & 223 & 234 & 344\,. \\ 113 & 123 & 134 & 224 & 244 \\ 114 & 124 & 144 & 233 & 334 \end{cases}$$

Anm. Eine allgemeine Formel für die Combinationszahl einer bestimmten Klasse bei eingeschränkten Wiederholungen gibt es nicht.

§. 318.

Lehrs. Die Anzahl aller Combinationen (SC) in allen verschiedenen Klassen für gegebene Elemente mit eingeschränkten Wiederholungen wird erhalten, wenn man vom Produkte aller je um 1 erhöhten Wiederholungsexponenten die Einheit subtrahirt.

Thes. $SC(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma \ldots n^\nu) = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) \ldots (1+\nu) - 1.$

Bew. Jedes Element gibt für sich allein soviele Complexionen, als sein Wiederholungsexponent Einheiten hat (z. B. das Element 1 die Complexionen 1, 11, 111, ... 1^α). Die Elemente 1 und 2 geben somit $\alpha + \beta$ Combinationen, in denen nur je ein Element wiederholt erscheint. Verbindet man nun alle α Formen, die bloß das Element 1 enthalten, mit allen, in welchen nur das Element 2 vorkommt, so entstehen $\alpha\beta$ neue Complexionen, welche beide Elemente enthalten. Die Anzahl (s') aller Gruppen aus den Elementen 1 und 2 ist somit

$$s' = \alpha + \beta + \alpha\beta = \alpha + (1+\alpha)\beta = 1 + \alpha + (1+\alpha)\beta - 1$$
$$= (1+\alpha)(1+\beta) - 1\,.$$

Das dritte Element gibt für sich γ Verbindungen, dann mit allen aus 1 und 2 bestehenden verbunden $\gamma s'$, also im Ganzen $\gamma + \gamma s' = (1+s')\gamma = (1+\alpha)(1+\beta)\gamma$ Complexionen.

Die Anzahl (s'') aller aus den ersten drei Elementen hervorgehenden Complexionen ist daher

$$s'' = (1+\alpha)(1+\beta) - 1 + (1+\alpha)(1+\beta)\gamma$$
$$= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) - 1\,.$$

Auf gleiche Weise wird durch ein viertes Element mit dem

Wiederholungsexponenten δ die Anzahl der bisher erhaltenen Formen um $\delta + \delta s'' = (1+s'')\delta = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\delta$ vermehrt, und daher folgt

$$s''' = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) - 1 + (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\delta$$
$$= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta) - 1 .$$

Schreitet man auf diesem Wege bis zum letzten Elemente n^ν fort, so ergibt sich allgemein

$$SC(1^\alpha 2^\beta 3^\gamma \ldots . n^\nu) = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\ldots.(1+\nu) - 1 .$$

So ist z. B. $SC(1^2 2^3 3) = 3.4.2 - 1 = 23$. Die Combinationen selbst sind folgende:

1	12	112	222	1222	11223
2	13	113	223	1223	12223
3	22	122	1122	2223	112223 .
11	23	123	1123	11222	

Zus. 1. Sind die Wiederholungsexponenten gleich, also $\alpha = \beta = \gamma = \ldots . . = \nu$, so wird die Anzahl aller Combinationen von n Elementen, d. i.

$$SC(123 \ldots . n)^\alpha = (1+\alpha)^n - 1 .$$

Z. B. die sogenannten Tarokkarten enthalten 9 verschiedene Bilder und zwar jedes 4mal (in 4 Farben). Diese 9 Bilder lassen sich also auf

$$(1+4)^9 - 1 = 5^9 - 1 = 125^3 - 1 = 1953124$$

verschiedene Arten combiniren.

Zus. 2. Die Anzahl aller Combinationen für n Elemente ohne Wiederholung in allen Klassen ist um 1 kleiner als die n^{te} Potenz von 2. Denn setzt man in Zus. 1. den Wiederholungsexponenten $\alpha = 1$, so folgt $SC(123 \ldots . n) = 2^n - 1$.

Z. B. Eine Orgel habe 24 klingende Register; so lassen sich mit denselben auf alle nur möglichen Arten $2^{24} - 1 = 16777215$ Combinationen ausführen. (Diese könnte ein Organist, wenn er bei täglich vierstündiger Arbeit, in jeder Minute 15 Combinationen machen würde, erst nach $12\frac{3}{4}$ Jahren vollenden).

§. 319.

Aufg. Alle möglichen Combinationsformen zu einer bestimmten Summe gut geordnet I. ohne und II. mit Wiederholung darzustellen.

Aufl. I. Man setze das der verlangten Summe entsprechende Element an, so bildet dieses die erste Klasse. Aus dieser erhält man die zweite, sowie aus jeder vorhergehenden die nächstfolgende Klasse, indem man jedes der gegebenen Elemente (vom niedrigsten an) einer jeden Complexion der nächst vorhergehenden Klasse, die mit einem höhern Elemente beginnt, vorsetzt, zugleich dieses vorgesetzte Element vom letzten Elemente der Complexion abzieht, und den Rest statt desselben substituirt. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die Elemente nicht mehr in natürlicher Ordnung sich folgen würden. — Sonach erhält man z. B.

$$^{10}C(123\ldots) = \begin{cases} \overline{10}^{*)} & 37 & 136 & 1234\,. \\ 19 & 46 & 145 & \\ 28 & 127 & 235 & \end{cases}$$

II. Bezüglich der Combinationen mit Wiederholung gilt die nämliche Regel, nur wird jedes Element einer jeden Complexion vorgesetzt, die mit einem nicht niedrigern Elemente anfängt, also auch solchen, die mit demselben Elemente beginnen. Z. B.

$$^{6}C_w(123\ldots\ldots) = \begin{cases} 6 & 33 & 222 & 11112 \\ 15 & 114 & 1113 & 111111\,. \\ 24 & 123 & 1122 & \end{cases}$$

Anm. Die Combinationen zu einer gegebenen Quersumme mit Wiederholung lassen sich auch sehr einfach, jede aus der unmittelbar vorhergehenden, rückwärts nach folgenden Regeln bilden:

1) Man setze das erste Element so oft, als die verlangte Summe Einheiten hat; dann theile man

2) den um 1 verminderten Zeiger des letzten durch den um 1 vermehrten des vorletzten Elementes, und setze

3) statt beider Elemente das durch den Divisor angezeigte Element so oft, als der Quotus angibt, und lasse noch ein Element folgen, dessen Index dem Divisor und dem Reste der Division zusammen gleich ist.

Haben die beiden letzten Elemente (rechts) denselben oder einen nur um 1 verschiedenen Zeiger, so wird den Regeln Nr. 2) und

*) Ist der Zeiger eines Elementes eine mehr als einzifferige Zahl, z. B. 12, so kann man, um ihn nicht mit einer Complexion zu verwechseln, entweder (12) oder $\overline{12}$ schreiben.

3) einfacher dadurch entsprochen, daß man statt beider nur ein Element setzt, dessen Index die Summe jener beiden Zeiger ist.

Demnach erhält man für obiges Beispiel

$$^{6}C_{w}(123\ldots) = \begin{cases} 111111 & 1122 & 15 & 33 \\ 11112 & 114 & 222 & 6\,. \\ 1113 & 123 & 24 & \end{cases}$$

§. 320.

Aufg. Eine beliebige Combinationsklasse für bestimmte Zahlenelemente zu einer gegebenen Quersumme zu bilden.

Aufl. I. Man habe ohne Wiederholung die m^{te} Klasse zu bilden, so besetze man für jede höhere als die 2^{te} Klasse, die nach §. 319. dargestellt wird, die $m-1$ ersten Stellen mit den niedrigsten Elementen und die letzte mit dem Ergänzungselemente, d. i. jenem, welches die Quersumme des bereits vorhandenen Theiles der Complexion zur verlangten Quersumme ergänzt. Um ferner aus jeder Complexion die nächstfolgende zu erhalten, suche man von der Rechten gegen die Linke gehend ein Element, das wenigstens um 3 kleiner ist, als das letzte (rechts); erhöhe dasselbe um 1, besetze die ihm rechts folgenden Stellen mit den nächst höhern Elementen, und die letzte mit dem Ergänzungselemente. Z. B.

$$^{15}C^{4}(123\ldots\ldots) = \begin{cases} 1239 & 1257 & 1356 \\ 1248 & 1347 & 2346\,. \end{cases}$$

II. In Hinsicht auf das Combiniren mit Wiederholung werden die $m-1$ ersten Stellen mit dem niedrigsten Elemente und die letzte mit dem Ergänzungselemente besetzt. Hierauf wird von rechts gegen links ein Element gesucht, das um mehr als 1 kleiner ist, als das letzte zur Rechten, dasselbe um 1 erhöht, die ihm rechts folgenden Stellen mit dem nämlichen Elemente und die letzte mit dem Ergänzungselemente besetzt. Z. B.

$$^{11}C^{3}_{w}(123\ldots\ldots) = \begin{cases} 119 & 137 & 155 & 236 & 335 \\ 128 & 146 & 227 & 245 & 344\,. \end{cases}$$

Anm. 1. Es ist leicht einzusehen, daß diese Art von Combinationen unmöglich wird, wenn 1) die höchste Form die gegebene Summe noch nicht erreicht, 2) die niedrigste Form dieselbe schon übersteigt. Z. B.

$$^{11}C^{3}_{w}(123) \text{ und } ^{10}C^{3}_{w}(456\ldots)\,.$$

Anm. 2. Die Anzahl der Combinationen zu einer gegebenen Summe läßt sich durch eine allgemeine Formel nicht bestimmen.

C. Vom Variiren.

§. 321.

Erkl. 1. Variiren oder Verändern heißt alle möglichen Complexionen bestimmen, welche mit gegebenen Elementen unter gewissen Bedingungen gemacht werden können.

2. Jede von den durch Variiren erhaltenen Complexionen wird eine Variation oder Variationsform, die Menge der zu einer Variation verbundenen Elemente die Variationsklasse, die diese Menge angebende Zahl der Klassenexponent, und die Anzahl der für eine bestimmte Klasse möglichen Variationen die Variationszahl genannt.

3. Wie beim Combiniren kann man gegebene Elemente entweder a) ohne oder b) mit oder c) mit eingeschränkten Wiederholungen oder d) zu einer bestimmten Summe variiren.

4. Die Aufgabe, eine Anzahl (n) von Elementen zur m^{ten} Klasse zu variiren wird a) bei Variationen ohne Wiederholung durch $V^m(n)$, dann b) bei solchen mit Wiederholung durch $V^m_w(n)$, und c) beim Variiren zu einer gegebenen Summe (s) durch $^sV^m(n)$ angedeutet. Die Variationszahl wird ebenso, nur mit Vorsetzung von N (= Numerus) bezeichnet, z. B. $NV^m_w(123\ldots n)$.

Zus. Durch das Variiren erhält man formell und materiell verschiedene Complexionen; dasselbe vereinigt das Permutiren und Combiniren gegebener Elemente in sich.

§. 322.

Aufg. Aus gegebenen Elementen alle möglichen Variationen ohne Wiederholung gut geordnet nach Klassen darzustellen.

Aufl. Man setze alle gegebenen Elemente in ihrer natürlichen Ordnung an; so hat man V^1 oder die Klasse der Unionen. Aus dieser wird die zweite, hieraus die dritte ꝛc. Variationsklasse erhalten, wenn man jedes Element allen jenen Complexionen der nächstniedrigern Klasse vorsetzt, in welchen dasselbe noch nicht vor-

kommt, bis man zu jener Klasse gelangt, welche alle Elemente enthält. So erhält man z. B. für 4 Elemente abcd:

$$V^1(abcd) = \begin{matrix} a & b & c & d \,. \end{matrix}$$

$$V^2(abcd) = \left\{ \begin{matrix} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \,. \end{matrix} \right.$$

$$V^3(abcd) = \left\{ \begin{matrix} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb \,. \end{matrix} \right.$$

$$V^4(abcd) = \left\{ \begin{matrix} abcd & bacd & cabd & dabc \\ abdc & badc & cadb & dacb \\ acbd & bcad & cbad & dbac \\ acdb & bcda & cbda & dbca \\ adbc & bdac & cdab & dcab \\ adcb & bdca & cdba & dcba \,. \end{matrix} \right.$$

Man sieht, daß die vierte Variationsklasse nichts anderes enthält als sämmtliche Permutationen der Elemente abcd (vgl. §. 306.).

Zus. Werden gegebene Elemente ohne Wiederholung variirt, so ist die Anzahl der Klassen begrenzt, und die höchste enthält nur formell verschiedene Complexionen, d. i. alle Permutationen der gegebenen Elemente.

§. 323.

Aufg. Eine Anzahl gegebener Elemente überhaupt in gut geordneter Reihenfolge mit Wiederholung bis zur m^ten Klasse zu variiren.

Aufl. Die einzelnen Elemente in natürlicher Ordnung bilden die erste Klasse. Aus dieser erhält man die zweite, sowie jedesmal aus einer vorhergehenden die nächstfolgende, indem man jedes Element allen Variationsformen der vorhergehenden Klasse vorsetzt, und dieses Verfahren soweit fortsetzt, als Klassen gebildet werden sollen. Z. B.

$$V_w^1(abc) = \quad a \quad b \quad c\,.$$

$$V_w^2(abc) = \left\{\begin{array}{lll} aa & ba & ca \\ ab & bb & cb \\ ac & bc & cc\,. \end{array}\right.$$

$$V_w^3(abc) = \left\{\begin{array}{lll} aaa & baa & caa \\ aab & bab & cab \\ aac & bac & cac \\ aba & bba & cba \\ abb & bbb & cbb \\ abc & bbc & cbc \\ aca & bca & cca \\ acb & bcb & ccb \\ acc & bcc & ccc \text{ ꝛc.} \end{array}\right.$$

Zus. Bei Variationen mit Wiederholung kann die Anzahl der Klassen unbegrenzt sein.

§. 324.

Aufg. Eine beliebige Variationsklasse für gegebene Elemente unmittelbar gutgeordnet darzustellen, und zwar I. ohne und II. mit Wiederholungen.

Aufl. I. Schreibt man soviele der niedrigsten Elemente in natürlicher Ordnung an, als der Klassenexponent gestattet, so hat man die erste (niedrigste) Complexion. Um aus dieser und so aus jeder die nächstfolgende Complexion zu erhalten, suche man (von rechts nach links gehend) ein Element, das noch nicht das höchste ist, und dem auch nicht alle höhern vorangehen; setze für dieses das nächsthöhere von den nicht vorangehenden Elementen, und schreibe, während links nichts geändert wird, an die rechts folgenden Stellen die noch vorhandenen Elemente der Reihe nach. Z. B.

$$V^3(1234) = \left\{\begin{array}{llllll} 123 & 142 & 231 & 312 & 341 & 421 \\ 124 & 143 & 234 & 314 & 342 & 423 \\ 132 & 213 & 241 & 321 & 412 & 431 \\ 134 & 214 & 243 & 324 & 413 & 432\,. \end{array}\right.$$

II. Das erste Element so oft gesetzt, als es der Klassenexponent erlaubt, bildet die erste Complexion. Aus dieser erhält man die zweite und so aus jeder die nächstfolgende, wenn man

von der Rechten soweit gegen die Linke geht, bis man ein Element trifft, das überhaupt noch nicht das höchste ist, für dieses dann das nächsthöhere einsetzt, und, indem man zur Linken alles ungeändert läßt, die Stellen zur Rechten mit dem ersten Elemente besetzt. Z. B.

$$V_w^3(123) = \left\{\begin{matrix} 111 & 122 & 133 & 221 & 232 & 313 & 331 \\ 112 & 123 & 211 & 222 & 233 & 321 & 332 \\ 113 & 131 & 212 & 223 & 311 & 322 & 333 \\ 121 & 132 & 213 & 231 & 312 & 323 & \end{matrix}\right. .$$

Zus. Nach vorstehenden Regeln läßt sich, wenn irgend eine Complexion gegeben ist, unmittelbar die nächstfolgende derselben Variationsklasse ableiten.

§. 325.

Lehrs. Man erhält die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung für n Elemente und die m^{te} Klasse derselben, wenn man von n der Reihe nach $0, 1, 2 \ldots\ldots (m-1)$ abzieht, und die Differenzen mit einander multiplizirt.

Thes. $NV^m(n) = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-(m-1))$.

Bew. Die Variationen der m^{ten} Klasse für n Elemente ohne Wiederholung enthalten die Combinationen für ebendiese Klasse und Elemente, und überdieß jede dieser Combinationsformen permutirt. Es ist somit $NV^m(n) = NC^m(n) . NP(m)$. Da nun $NP(m) = m! = 1.2.3 \ldots\ldots m$, so fällt in der Formel §. 314. nur der Divisor weg, wodurch die oben angegebene erscheint.

Z. B. Wie oft lassen sich die 25 Buchstaben des Alphabetes zu je 5 variiren? — Man erhält

$$NV^5(123 \ldots\ldots \overline{25}) = 25 . 24 . 23 . 22 . 21 = 6375600 .$$

Zus. Für $m = n$ wird $NV^n(n) = n!$ d. h. —?

§. 326.

Lehrs. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung zur m^{ten} Klasse für n Elemente wird erhalten, wenn man die Anzahl der Elemente mit dem Klassenexponenten potenzirt.

Thes. $NV_w^m(n) = n^m$.

Bew. Da jedes Element eine Union gibt, so ist die Anzahl der Unionen von n Elementen $= n = n^1$. Verbindet man jedes

Element mit allen Unionen, so erhält man $n.n = n^2$ Binionen. Jede von diesen wieder mit jedem Elemente verbunden gibt $n^2.n = n^3$ Ternionen. Hieraus entstehen ebenso $n^3.n = n^4$ Quaternionen u. s. f. Daher ist allgemein n^m die Variationszahl für die m^{te} Klasse.

Zus. Die Variationszahlen bilden also bei Wiederholung der Elemente von der ersten bis m^{ten} Klasse eine geometrische Progression, deren erstes Glied und Quotient n, und deren letztes Glied n^m ist. Ihre Summe ist daher (§. 279.)

$$S = \frac{n^m.n - n}{n-1} = \frac{n(n^m - 1)}{n-1}.$$

Setzt man $n = m = 9$, so erhält man als Anzahl aller möglichen ein- bis neunzifferigen Zahlen, welche mit den neun Zahlzeichen 1, 2, 3 . . . . 9 geschrieben werden können, die Summe

$$S = \frac{9(9^9 - 1)}{8} = 435848049 .$$

§. 327.

Aufg. Irgend eine Variationsklasse für gegebene Elemente mit eingeschränkten Wiederholungen zu bilden.

Aufl. So viele der niedrigsten Elemente und jedes so oft gesetzt, als es mit Rücksicht auf die Wiederholungs- und den Klassenexponenten geschehen darf, gibt die erste Complexion. Um aus dieser successive die übrigen abzuleiten, verfahre man nach den Regeln des §. 324. — Z. B.

$$V^3(12^2 3^3) = \begin{cases} 122 & 212 & 231 & 313 & 331 \\ 123 & 213 & 232 & 321 & 332 \\ 132 & 221 & 233 & 322 & 333 . \\ 133 & 223 & 312 & 323 & \end{cases}$$

§. 328.

Aufg. Gegebene Zahlenelemente zu einer bestimmten Quersumme I. ohne und II. mit Wiederholung für alle nur möglichen Klassen zu variiren.

Aufl. Man combinire die gegebenen Elemente nach §. 319., permutire die einzelnen erhaltenen Complexionen, und bringe diese Permutationsformen in eine solche Anordnung, daß sie gleich den

durch sie bezeichneten Zahlen in steigender Reihenfolge dargestellt erscheinen. Z. B.

I. Zur Quersumme 8 sind die Combinationen ohne Wiederholung für die Elemente 123 . . . . (nach §. 319, I.):

$$^{8}C(123\ldots) = 8;\ 17,\ 26,\ 35;\ 125 \text{ und } 134;$$

daher ergeben sich als Variationsformen zur Summe 8 ohne Wiederholung die gut geordneten Complexionen

$$^{8}V(123\ldots) = \begin{cases} 8 & 53 & 134 & 251 & 431 \\ 17 & 62 & 143 & 314 & 512 \\ 26 & 71 & 152 & 341 & 521\,. \\ 35 & 125 & 215 & 413 & \end{cases}$$

II. Als Combinationen mit Wiederholung zur Quersumme 5 ergeben sich (nach §. 319, II.):

$$^{5}C_{w}(123\ldots) = 5;\ 14,\ 23;\ 113,\ 122;\ 1112;\ 11111;$$

mithin erhält man als Variationsformen zur Summe 5 mit Wiederholung:

$$^{5}V_{w}(123\ldots) = \begin{cases} 5 & 41 & 212 & 1121 \\ 14 & 113 & 221 & 1211 \\ 23 & 122 & 311 & 2111 \\ 32 & 131 & 1112 & 11111\,. \end{cases}$$

§. 329.

Aufg. Die m^{te} Variationsklasse für gegebene Zahlenelemente zu einer bestimmten Quersumme mit Wiederholungen unmittelbar gut geordnet darzustellen.

Aufl. Man besetze die (m—1) ersten Stellen mit dem niedrigsten Elemente und die letzte mit dem Ergänzungselemente; so hat man die erste Complexion. Um aus dieser, und ebenso aus jeder weitern die nächst darauffolgende zu erhalten, suche man, von der Rechten gegen die Linke gehend, das erste Element, welches größer als das niedrigste ist, erhöhe das ihm links vorhergehende um 1, besetze dann die ihm rechts folgenden Stellen mit dem niedrigsten und die letzte Stelle mit dem Ergänzungselemente. — Auf diese Art erhält man z. B.

$$^{8}V^{3}_{w}(123\ldots) = \begin{cases} 116 & 143 & 215 & 242 & 323 & 413 & 512 \\ 125 & 152 & 224 & 251 & 332 & 422 & 521 \\ 134 & 161 & 233 & 314 & 341 & 431 & 611\,. \end{cases}$$

Nimmt man hiezu noch das Element 0 unter der Einschränkung, daß dasselbe in keiner Complexion als Anfangselement erscheint, so kommen zu den obigen noch folgende Complexionen hinzu

107 206 305 404 503 602 701 800 .
170 260 350 440 530 620 710

Hiemit hat man, die sämmtlichen Complexionen als dekadische Zahlen betrachtet, alle dreizifferigen Zahlen, deren Quersumme 8 ist.

Zus. Werden bei dem oben angegebenen Verfahren, nachdem man zuerst die m — 1 ersten Stellen mit den niedrigsten Elementen besetzt und dadurch die erste Complexion erhalten hat, alle jene Complexionen, bei welchem das Ergänzungselement mit einem schon vorhandenen identisch würde weggelassen, oder bildet man die Combinationen zur gegebenen Quersumme ohne Wiederholung, und permutirt dieselben; so erhält man die Variationen zur m^{ten} Klasse für die gegebenen Elemente ohne Wiederholung. —

Anm. Auch hier treten (vgl. §. 320, Anm. 1.) zwei Fälle des Widerspruches ein, wenn nämlich 1) die höchste Form zu wenig oder 2) die niedrigste Form zu viel zeigt. Z. B. $^{9}V^{2}_{w}(1234)$ oder $^{9}V^{2}_{w}(5678\ldots)$.

II. Kap. Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§. 330.

Erkl. 1. Bei jedem Ereignisse hat man, wenn es sich um dessen Eintreten oder Nichteintreten handelt, a) gleichmögliche, d. i. überhaupt bezüglich desselben denkbare, b) günstige, d. i. dafür, und c) ungünstige, d. i. dagegen sprechende Fälle zu unterscheiden.

2. Das Verhältniß der ein Ereigniß begünstigenden zu allen gleich möglichen Fällen nennt man die mathematische Wahrscheinlichkeit oder Probabilität desselben.

3. Die Probabilität eines Ereignisses wird durch einen Bruch bezeichnet, dessen Zähler die Anzahl der günstigen und dessen Nenner die aller gleich möglichen Fälle ist.

4. Die Wissenschaft von der Bestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit wird Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi, Calcul des Probabilités) genannt.

§. 331.

Erkl. 1. Jene Wahrscheinlichkeit, welche alle möglichen Gründe für und keinen gegen sich hat, bei der also alle gleichmöglichen Fälle auch zugleich günstige sind, heißt Gewißheit.

2. Das Verhältniß der einem Ereignisse ungünstigen zu allen gleichmöglichen Fällen, wird entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit genannt. Sie wird ebenso wie die Wahrscheinlichkeit selbst bezeichnet.

§. 332.

Erkl. Man unterscheidet folgende Arten der Probabilität:

1) einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit, wenn nur ein Ereigniß an und für sich in Betracht kommt;

2) verbundene Wahrscheinlichkeit, wenn untersucht wird, ob von mehreren günstigen Fällen eines Ereignisses der eine oder der andere eintritt;

3) relative Wahrscheinlichkeit, wenn man bei Fällen, die bestimmten Ereignissen verschiedener Art günstig sind, untersucht, ob eher der eine als der andere zutrifft, ohne Rücksicht auf die noch übrigen möglichen Fälle zu nehmen;

4) zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, wenn das gleichzeitige oder folgemäßige Zusammentreffen mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse in Betracht kommt.

Anm. Außerdem wird noch zwischen Probabilität aus Gründen (a priori) und aus Beobachtungen (a posteriori) unterschieden, je nachdem die Anzahl der möglichen sowohl als der günstigen Fälle auf rein wissenschaftlichem Wege oder mittelst aus Beobachtung gezogener Erfahrung bestimmt wird.

§. 333.

Lehrs. Die Einheit ist das Symbol der Gewißheit.

Bew. Bezeichnet n die Anzahl der einem Ereigniß günstigen, N die aller gleichmöglichen Fälle und w dessen Wahrscheinlichkeit, so ist (nach §. 330, 3.) $w = n : N$. In dieser Gleichung wird aber offenbar $w = 1$, wenn $n = N$ ist; in diesem Falle ist aber Gewißheit vorhanden (§. 331, 1.).

Zus. Mit Rücksicht auf die Gleichung $w = n : N$ nennt man ein Ereigniß

a) gewiß, wenn $w = 1$,
b) wahrscheinlich, wenn $w > \frac{1}{2}$,
c) ungewiß oder zweifelhaft, wenn $w = \frac{1}{2}$,
d) unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ und
e) unmöglich, wenn $w = 0$ ist.

So ist es z. B. sehr unwahrscheinlich, mit einem gewöhnlichen Würfel auf den ersten Wurf eine bestimmte Zahl (z. B. 4) zu werfen; denn für 6 mögliche Fälle ist nur ein günstiger vorhanden; also ist $w = \frac{1}{6}$. Mit einer Münze Kopf (oder Wappen) zu werfen ist zweifelhaft; denn es ist hier $N = 2$ und $n = 1$, also $w = \frac{1}{2}$.

§. 334.

Lehrs. Die Wahrscheinlichkeit (w) und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit (v) eines Ereignisses ergänzen sich gegenseitig zur Einheit (d. i. zur Gewißheit).

Thes. $w + v = 1$.

Bew. Ist N die Anzahl der gleichmöglichen, und n die der günstigen Fälle, so ist die der ungünstigen $N - n$, mithin $w = n : N$ und $v = (N - n) : N$ und daher

$$w + v = \frac{n}{N} + \frac{N - n}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Man nennt daher die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit auch die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit.

Zus. 1. Jede der beiden Arten von Probabilität ist der Differenz zwischen der Einheit und der andern Wahrscheinlichkeit gleich. Denn aus der Gleichung des Lehrs. folgt:

1) $v = 1 - w$ und 2) $w = 1 - v$.

Zus. 2. Setzt man die Anzahl der einem Ereignisse ungünstigen Fälle, d. i. $N - n = m$; also $N = n + m$; so ist

1) $w = \frac{n}{n + m}$ und 2) $v = \frac{m}{n + m}$, d. h. —?

§. 335.

Aufg. Die einfache oder absolute Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu bestimmen.

Aufl. u. Bew. Man bestimme auf irgend eine Art die Anzahl aller für das Ereigniß gleichmöglichen Fälle, ebenso der für dasselbe günstigen Fälle; so ist das Verhältniß der letztern zu den erstern die gesuchte Probabilität (§. 330, 2.).

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 gewöhnlichen Würfeln die Summe 8 a) überhaupt und b) so zu werfen, daß zwei gleiche Zahlen (ein Pasch) dabei sind?

Es ist für beide Fälle $N = 6^3 = 216$ (§. 326.). Ferner ist in Bezug auf a) $n = 21$ (§. 329.); mithin $w = \frac{21}{216} = \frac{7}{72}$ *). In Hinsicht auf b) können die gleichen Zahlen nur 11, 22 oder 33, also die ungleichen beziehungsweise 6, 4 und 2 sein. Da aber diese letztern jeder Würfel zeigen kann, so wird $n = 3.3 = 9$, und daher $w = \frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

2) In einer Urne liegen 12 weiße, 15 rothe, 20 blaue und 25 grüne Marken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit auf den ersten Griff eine blaue Marke zu ziehen?

Für die gleichmöglichen Fälle hat man hier

$$N = 12 + 15 + 20 + 25 = 72,$$

für die günstigen $n = 20$; also ist $w = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

3) Neun Spielkarten von einer Farbe werden gehörig gemischt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden obersten Blätter Aß und König sind?

Die zwei obersten Karten bilden eine der Combinationen der 2ten Klasse für 9 Elemente ohne Wiederholung. Es wird somit $N = \frac{9.8}{1.2} = 36$ (§. 314.), dann $n = 1$; also $w = \frac{1}{36}$.

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in der gewöhnlichen Zahlenlotterie eine Ambe zu gewinnen, wenn man 10 beliebige von den 90 Nummern auswählt, und alle darin enthaltenen Amben setzt?

Die 90 Nummern enthalten 4005, die gezogenen 5 Nummern 10 Amben; also ist überhaupt für eine Ambe $w_1 = 10 : 4005$. Da aber die gewählten 10 Nummern 45 Amben enthalten (§. 314.);

---

*) Es muß hiebei die Ordnung der Würfel beobachtet, d. h. einer derselben als erster, die andern als zweiter und dritter gedacht werden, so daß also z. B. 116, 161 und 611 als drei verschiedene Würfe gelten.

so wird die Wahrscheinlichkeit, daß eine von den gesetzten Amben gezogen wird, nämlich

$$w = \frac{45 . 10}{4005} = \frac{10}{89} \left(\text{nahe} = \frac{1}{9}\right).$$

§. 336.

Lehrs. Die verbundene Wahrscheinlichkeit (w) ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten (w', w'', w'''...) der einzelnen günstigen Fälle.

Thes. $w = w' + w'' + w''' + \ldots.$

Bew. Es sei N die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle des Ereignisses, und n', n'', n'''... die demselben günstigen Fälle; so hat man unter den N gleichmöglichen n' + n'' + n''' + ... günstige Fälle. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß der eine oder andere günstige Fall eintritt, d. i.

$$w = \frac{n' + n'' + n''' \ldots}{N} = \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} + \frac{n'''}{N} + \ldots, \text{ d. i.}$$

$$= w' + w'' + w''' \ldots. \text{ (§. 330, 3).}$$

Beispiele. 1) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, mit 2 Würfeln a) 5 oder 7, b) 5 oder 8, c) 7 oder 8, d) 5 oder 7 oder 8 zu werfen?

Es ist die Anzahl der gleichmöglichen Fälle, also $N = 6^2 = 36$. In Bezug auf die Summe 5 hat man, da $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$ ist, d. h. die Summe 5 auf viererlei Art fallen kann, $n' = 4$; also die (absolute) Wahrscheinlichkeit, 5 zu werfen, oder $w' = \frac{4}{36}$. Ebenso findet man, in Bezug auf 7, $w'' = \frac{6}{36}$, und, in Bezug auf 8, $w''' = \frac{5}{36}$. Es ist daher für

a) $w = \frac{4+6}{36} = \frac{5}{18}$. c) $w = \frac{6+5}{36} = \frac{11}{36}$ und

b) $w = \frac{4+5}{36} = \frac{1}{4}$ d) $w = \frac{4+6+5}{36} = \frac{5}{12}$.

2) Als Wahrscheinlichkeit, aus einem Behältnisse, das 5 weiße, 7 gelbe und 9 rothe Kugeln enthält, auf einen Zug entweder a) eine weiße oder gelbe, b) eine weiße oder rothe, c) eine gelbe oder rothe zu ziehen, erhält man beziehungsweise $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{16}{21}$. Denn die Probabilitäten für eine weiße, gelbe und eine rothe Kugel

sind der Ordnung nach $\frac{5}{21}$, $\frac{7}{21}$ und $\frac{9}{21}$; daher in Bezug auf

a) $w = \frac{5+7}{21} = \frac{4}{7}$ u. s. f.

§. 337.

Lehrs. Die relative Wahrscheinlichkeit (w) eines Ereignisses wird erhalten, wenn man seine absolute Wahrscheinlichkeit (w′) durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten (w′, w″, w‴ ...) der verglichenen Ereignisse dividirt.

Thes. $w = \frac{w'}{w' + w'' + w''' \ldots}$.

Bew. Es bezeichne N alle gleichmöglichen Fälle des Ereignisses, n′, n″, n‴ ... bezüglich die Anzahl der fraglichen Fälle der ersten, zweiten, dritten ... Art; so hat man n′ + n″ + n‴ .... Fälle verschiedener Art, und unter diesen n′ Fälle der ersten Art 2c. Daher ist die relative Wahrscheinlichkeit für einen Fall dieser Art, d. i.

$$w = \frac{n'}{n' + n'' + n''' \ldots} = \frac{n' : N}{n' : N + n'' : N + n''' : N \ldots} = \frac{w'}{w' + w'' + w''' \ldots}.$$

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln eher die Summe 7 als 9 zu werfen?

Für die Summen 7 und 9 sind beziehungsweise 6 und 4 günstige Fälle, also 6 + 4 = 10 die Anzahl der gleichmöglichen Fälle (da jede andere Summe nicht in Betracht kommt), und daher die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit $w = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

2) Eine Urne enthält 6 weiße, 10 rothe, 14 blaue und 20 gelbe Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eher eine gelbe als eine weiße Kugel herauszunehmen?

Die absolute Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel ist $\frac{6}{50}$, für das einer gelben $\frac{20}{50}$; daher wird die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit $w = \frac{20}{20 + 6} = \frac{10}{13}$.

3) Wie groß ist in dem vorhergehenden Beispiele die relative Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Ziehen von zwei Kugeln eher eine rothe und blaue, als eine weiße und gelbe zu erhalten?

Eine rothe und blaue Kugel lassen sich zu zweien $10 . 14 = 140$, eine weiße und gelbe $6 . 20 = 120$ Mal verbinden. Es ist also $n' = 140$, $n'' = 120$, und daher

$$w = \frac{140}{140 + 120} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} = 0·54 \text{ (sehr nahe).}$$

Die Anzahl der gleichmöglichen Fälle ist $NC^2(50) = 1225$; mithin die absolute Wahrscheinlichkeit für den fraglichen Fall $140 : 1225 = 4 : 35$.

§. 338.

Lehrs. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse (w) ist dem Produkte der (einfachen) Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse (w', w'', w''' ....) gleich.

Thes. $w = w' . w'' . w''' ....$

Bew. Man habe zwei Ereignisse, und es sei die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle in Bezug auf das erste $= N'$, in Bezug auf das zweite $= N''$. Da nun jeder der zweiten Fälle mit jedem der ersten zusammentreffen kann, so ist in Hinsicht auf das Zusammentreffen beider Ereignisse die Anzahl der gleichmöglichen Fälle offenbar $= N' . N''$, und ebenso ist die Anzahl der günstigen Fälle des zusammengesetzten Ereignisses $= n' . n''$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beider Ereignisse, d. i.

$$w = \frac{n' . n''}{N' . N''} = \frac{n'}{N'} . \frac{n''}{N''} = w' . w''.$$

Für jedes weiter hinzukommende Ereigniß ergibt sich die Richtigkeit des Satzes auf dieselbe Art, indem man das Zusammentreffen der bereits in Betracht gekommenen Ereignisse als ein einzelnes ansieht.

Zus. Auf dem Lehrs. beruht auch die Bestimmung der Probabilität des wiederholten Eintreffens eines Ereignisses. Man erhält dieselbe durch Potenzirung der einfachen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses mit der Wiederholungszahl, d. h. es ist für m malige Wiederholung desselben Ereignisses die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $w = (w')^m$.

Beispiele. 1) Von drei Personen werfen A und B mit 2 Würfeln, C mit einem. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A einen Pasch, B ein Paar ungleiche Zahlen und C eine bestimmte Zahl (z. B. 1) wirft.

Für A ist $w' = \frac{6}{36}$, für B $w'' = \frac{30}{36}$ und für C $w''' = \frac{1}{6}$; mithin $w = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216} = 0{\cdot}023 \ldots$

2) Welche Wahrscheinlichkeit hat man, aus einem wohlgemischten Spiele von 36 Karten unmittelbar nach einander zuerst Aß und dann König von der nämlichen Farbe zu ziehen?

Da die Farbe nicht bestimmt ist, so ist die absolute Wahrscheinlichkeit, ein Aß zu ziehen, d. i. $w' = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit auf den 2ten Zug den König derselben Farbe zu erhalten, ist nunmehr $w'' = \frac{1}{35}$; daher $w = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{35} = \frac{1}{315} = 0{\cdot}003 \ldots$

3) Von zwei Urnen enthält die eine 7 weiße und 3 schwarze, die andere 6 weiße und 9 schwarze Kugeln. Welche Wahrscheinlichkeit hat man, durch einen zufälligen Griff in eine der Urnen eine schwarze Kugel zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit, in die erste Urne zu greifen ist $= \frac{1}{2}$, und jene, eine schwarze Kugel zu ziehen $= \frac{3}{10}$; also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit $w' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$. Ebenso wird in Bezug auf die andere Urne $w'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$; mithin, da beide Ereignisse dem in Frage stehenden günstig sind, (nach §. 336.):

$$w = w' + w'' = \frac{3}{20} + \frac{3}{10} = \frac{9}{20}.$$

§. 339.

Lehrs. Die Wahrscheinlichkeit (w), daß von zwei Ereignissen das erste oder, wenn dieses nicht der Fall ist, dann doch das zweite eintreffe, ist gleich der Summe vermindert um das Produkt der Wahrscheinlichkeiten (w' und w'') beider Ereignisse, oder gleich der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

Thes. $w = w' + w'' - w' \cdot w'' = 1 - (1 - w')(1 - w'')$.

Bew. Die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß eintritt, ist w'; also die entgegengesetzte oder die Wahrscheinlichkeit, daß es nicht zutrifft $= 1 - w'$ (§. 334, Zus. 1.). Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß nicht, aber dann das zweite eintrifft $= (1 - w') \cdot w''$ (§. 338.). Da nun aber das erste oder doch andernfalls das zweite Ereigniß eintreten soll; so hat man (nach §. 336.):

$$w = w' + (1 - w') . w'' = w' + w'' - w' . w'', \text{ oder}$$
$$= 1 - 1 + w' + w'' - w' . w''$$
$$= 1 - (1 - w') + w''(1 - w')$$
$$= 1 - (1 - w')(1 - w'') .$$

Zus. Bezeichnen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für solche sogenannte wechselseitige Ereignisse w' und w'' die Probabilitäten von zweien derselben A und B; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von ihnen eintreffe

A und B zugleich . . . $= w' . w''$
A, aber nicht B . . . $= w'(1 - w'')$
B, aber nicht A . . . $= (1 - w') . w''$
weder A noch B . . . $= (1 - w')(1 - w'')$
A oder B . . . . $= 1 - (1 - w')(1 - w'')$.

Dieses Gesetz läßt sich ebenso auf mehrere Ereignisse anwenden.

Beispiele. 1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zuerst 6 oder, wenn dieß nicht zutrifft, darauf 7 zu werfen?

Die Wahrscheinlichkeit 6 zu werfen ist $\frac{5}{36}$, und jene 7 zu werfen $\frac{6}{36}$; daher die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{5}{36} . \frac{1}{6} = \frac{11}{36} - \frac{5}{216} = \frac{61}{216} \text{ (nahe } = \tfrac{2}{7}\text{)}.$$

2) Welche Wahrscheinlichkeit hat man aus einem deutschen Kartenspiele von 32 Blättern auf den ersten Zug eine bestimmte Karte, z. B. einen König, oder wenn dieß nicht geschieht, das zweite Mal eine bestimmte Farbe, z. B. roth zu ziehen?

Die Wahrscheinlichkeit einen König zu ziehen ist $= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, und die, ein Blatt von rother Farbe zu erhalten $= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; mithin

$$w = 1 - (1 - \tfrac{1}{8})(1 - \tfrac{1}{4}) = 1 - \tfrac{7}{8} . \tfrac{3}{4} = \tfrac{11}{32} .$$

3) Es seien die aus Mortalitätstabellen entnommenen Wahrscheinlichkeiten, daß zwei Personen A und B einzeln noch 12 Jahre leben werden, beziehungsweise 0·8 und 0·75; so ist in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit, daß nach Ablauf dieser Zeit

a) beide noch beisammen leben werden,
$w = 0{\cdot}8 . 0{\cdot}75 = 0{\cdot}6$;

b) A noch leben, B aber schon tod sein werde,
$w = 0{\cdot}8(1 - 0{\cdot}75) = 0{\cdot}8 . 0{\cdot}25 = 0{\cdot}2$;

c) B noch leben und A gestorben sein werde

$$w = (1 - 0{\cdot}8) . 0{\cdot}75 = 0{\cdot}2 . 0{\cdot}75 = 0{\cdot}15 ;$$

d) keine von beiden mehr am Leben sein werde

$$w = (1 - 0{\cdot}8)(1 - 0{\cdot}75) = 0{\cdot}2 . 0{\cdot}25 = 0{\cdot}05 ;$$

e) wenigstens eine von beiden noch lebt

$$w = 1 - (1 - 0{\cdot}8)(1 - 0{\cdot}75) = 1 - 0{\cdot}2 . 0{\cdot}25 = 0{\cdot}95 .$$

III. Kap. Der binomische Lehrsatz.

§. 340.

Erkl. 1. Jeder Ausdruck, welcher aus zwei durch ± verbundenen Theilen besteht oder daraus bestehend gedacht wird, heißt bekanntlich ein Binom oder eine Binomialgröße (vgl. §. 14, 2. und §. 31.).

2. Eine Reihe, nach welcher sich jedes Binom zu einer beliebigen Potenz erheben läßt (also der analytische Ausdruck für jede Potenz eines Binoms), wird Binomialformel genannt.

3. Das allgemeine Gesetz, nach welchem ein Binomium zu einer verlangten Potenz erhoben werden kann, heißt der binomische, auch Newton'sche Lehrsatz oder das Binomialtheorem.

A. Von den Binomialkoëffizienten.

§. 341.

Erkl. 1. Bezeichnet a einen beliebigen reellen Ausdruck, und n eine positive ganze Zahl, so wird das Zeichen a_n ein Binomialkoëffizient, n dessen Zeiger oder Index und a die ihm zugehörige Zahl oder die Basis genannt (vgl. §. 284, Anm.).

2. Der Binomialkoëffizient a_n bezeichnet einen Quotus, dessen Dividend ein Produkt von n Faktoren, von denen der erste a, jeder folgende um 1 kleiner als der nächstvorhergehende, und dessen Nenner die Fakultät von n, also das Produkt der Zahlen 1.2.3. . . . . n ist; d. h. es ist

$$a_n = \frac{a(a-1)(a-2) \ldots\ldots (a-(n-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, . \,.\, . \,.\, n} .$$ So ist z. B.

$$9_5 = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126 .$$

Zus. 1. Ein Binomialkoëffizient ist also nach vorstehendem Ausdrucke nichts anderes als die Combinationszahl von a Elementen zur n^{ten} Klasse.

Zus. 2. Ein Binomialkoëffizient, dessen Basis und Zeiger einander gleich sind, ist $=1$. Denn setzt man $a = n$, so folgt

$$n_n = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 2 . 1}{1 . 2 . 3 \ldots (n-1) n} = 1 .$$

Umgekehrt kann man statt 1 jeden beliebigen Binomialkoëffizienten mit einerlei Basis und Index setzen.

§. 342.

Lehrs. Jeder Binomialkoëffizient, dessen Basis eine ganze positive Zahl, aber kleiner als der Index ist, ist gleich Null.

Dat. $a > 1$ und $a < n$. — Thes. $a_n = 0$.

Bew. Nach dem oben (§. 341.) aufgestellten Begriffe ist

$$a_n = \frac{a(a-1)(a-2) \ldots\ldots (a-(n-1))}{1 . 2 . 3 . \ldots . n} .$$

Da nun $n > a$, so enthält der Zähler dieses Bruches mehr Faktoren, als a Einheiten hat; es muß somit a selbst einmal als Subtrahend in einem Faktor erscheinen, d. h. ein Faktor $a - a = 0$ werden, wodurch der ganze Ausdruck, d. i. $a_n = 0$ wird (§. 38, II. und §. 58, I.). Z. B.

$$4_6 = \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} = 0 .$$

§. 343.

Lehrs. Zwei Binomialkoëffizienten, die derselben ganzen positiven Zahl zugehören, sind einander gleich, wenn die Summe ihrer Zeiger gleich der Basis ist.

Thes. $a_n = a_{a-n}$.

Bew. Für den Fall, daß $n = a - n$ ist, leuchtet die Richtigkeit der Behauptung von selbst ein. Es ist also dieselbe nur für die Voraussetzung zu beweisen, daß beide ungleich sind. Es sei daher z. B. $n > a - n$, so erhält man

$$1) \quad a_{a-n} = \frac{a(a-1)(a-2) \ldots . (n+1)}{1 . 2 . 3 . \ldots (a-n)} .$$ Ferner ist

$$a_n = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1))}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;n}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(n+1).n\ldots(a-(n-1))}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.(a-n)(a-(n-1))\ldots n};$$

denn wegen $n > a-n$ kommen in dem Werthe von a_n alle Faktoren des Werthes von a_{a-n} vor. Es ist somit auch

2) $a_n = \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;(a-n)}$; und daher durch Comparation der Gleichungen 2) und 1)

$$a_n = a_{a-n}\,. \text{ — Z. B.}$$

$$6_4 = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15\;;\;\text{ ebenso }\; 6_2 = \frac{6.5}{1.2} = 15\;.$$

Zus. Ein Binomialkoëffizient, der als Zeiger 0 hat, ist der Einheit gleich. Denn wird in der Formel des Lehrs. $n = 0$ gesetzt, so ergibt sich

$$a_0 = a_a = 1 \text{ (§. 341, Zus. 2.).}$$

§. 344.

Lehrs. Haben zwei Binomialkoëffizienten dieselbe Basis, und ihre Zeiger sind um 1 verschieden; so ist ihre Summe einem Binomialkoëffizienten gleich, der eine um 1 größere Basis und den größern der beiden Zeiger als Index hat.

Thes. $a_n + a_{n-1} = (a+1)_n$.

Bew. Es ist offenbar dem Begriffe gemäß

1) $a_n = \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-(n-2))(a-(n-1))}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;(n-1)\;.\;n}$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-2))(a+1-n)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;(n-1)\;.\;n}.$$

2) $a_{n-1} = \dfrac{a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-(n-2))}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-1)}$, also auch

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-2)).n}{1.2.3\;.\;.\;.\;.\;(n-1).n}.$$

Durch Addition beider Gleichungen und Herausstellung der gemeinschaftlichen Faktoren folgt

$$a_n + a_{n-1} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-2))(a+1-n+n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)n}$$

$$= \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-2))(a+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)\,.\,n}$$

$$= \frac{(a+1)a(a-1)\ldots(a-(n-2))}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}$$

$$= (a+1)_n\,.$$

Z. B. $n_2 + n = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + n = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$= \frac{(n+1)n}{1\,.\,2} = (n+1)_2\,.$$

§. 345.

Aufg. Es sollen die Summen folgender Binomialkoëffizienten I. $m_2 + mn + n_2$, und II. $m_3 + m_2n + mn_2 + n_3$ in einen Binomialkoëffizienten verwandelt werden.

Aufl. $\begin{cases} \text{I.} & m_2 + mn + n_2 = (m+n)_2\,. \\ \text{II.} & m_3 + m_2n + mn_2 + n_3 = (m+n)_3\,. \end{cases}$

Bew. Es ist, wenn man die einzelnen Binomialkoëffizienten auflöst und dann die erhaltenen Ausdrücke reduzirt

$$\text{I.}\quad m_2 + mn + n_2 = \frac{m(m-1)}{1\,.\,2} + mn + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{m^2 - m + 2mn + n^2 - n}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{(m+n)^2 - (m+n)}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)}{1\,.\,2}$$

$$= (m+n)_2\,.$$

II. Verfährt man auf gleiche Weise wie oben, so hat man

$$m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$m_2n = \frac{m(m-1)n}{1\,.\,2} = \frac{m^2n - mn}{1\,.\,2} = \frac{3m^2n - 3mn}{1\,.\,2\,.\,3};$$

Ebenso findet sich $mn_2 = \frac{3mn^2 - 3mn}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ und

$$n_3 = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Durch Addition und gehörige Reduktion folgt

$$m_3 + m_2n + mn_2 + n_3 = \frac{(m+n)^3 - 3(m+n)^2 + 2(m+n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= \frac{(m+n)^3 - (m+n)^2 - 2(m+n)^2 + 2(m+n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= \frac{(m+n)^2(m+n-1) - 2(m+n)(m+n-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$= (m+n)_3 \,.$$

Zus. Auf ähnliche Weise erhält man
$m_4 + m_3n + m_2n_2 + mn_3 + n_4 = (m+n)_4$; dann
$m_5 + m_4n + m_3n_2 + m_2n_3 + mn_4 + n_5 = (m+n)_5$ u. s. w.

B. Vom binomischen Lehrsatze.

§. 346.

Lehrs. Für jeden ganzen und positiven Werth des Exponenten n ist die Potenz $(1+x)^n$ gleich einem aus (n + 1) Gliedern bestehenden und nach steigenden Potenzen der Größe x von $x^0 (= 1)$ bis x^n geordneten Ausdrucke, in welchem die einzelnen Glieder als Koëffizienten der Ordnung nach Binomialkoëffizienten mit der gemeinsamen Basis n haben, deren Zeiger mit dem jedesmaligen Exponenten von x übereinstimmen (also gleichfalls die natürliche Zahlenreihe von 0 bis n bilden).

Thes. $(1+x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots n_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *).

Bew. Jede ganze und positive Potenz eines Binoms ist nur ein spezieller Fall eines Produktes von lauter binomischen Faktoren. Entwickelt man aber folgende Produkte, so ergibt sich nach Zusammenziehung der gleichartigen Glieder:

---

*) Die Binomialkoëffizienten des ersten und letzten Gliedes fallen weg, da $n_0 = n_n = 1$ ist (§. 343, Zus.).

$(1+ax)(1+bx) = 1+(a+b)x+abx^2$;
$(1+ax)(1+bx)(1+cx) = 1+(a+b+c)x+(ab+ac+bc)x^2+abcx^3$;
$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx) = 1+(a+b+c+d)x+(ab+ac$
$+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x^3+abcdx^4$.

Hiebei sind leicht folgende Gesetze ersichtlich:

1) Die Anzahl der Glieder ist in jeder Entwicklung um eins größer, als die Anzahl der Faktoren des Produktes.

2) Die Exponenten von x steigen in der Ordnung der natürlichen Zahlenreihe von $1 = x^0$ angefangen, und der höchste hat ebensoviele Einheiten, als das Produkt Faktoren enthält.

3) Die Koëffizienten von x, x^2, x^3, x^4 enthalten alle Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen a, b, c, d beziehungsweise zur ersten, zweiten, dritten, vierten Klasse, wobei die als Produkte betrachteten Complexionen einer jeden Klasse addirt sind.

Diese Gesetze erweisen sich für jeden neu hinzukommenden binomischen Faktor als richtig, so daß man allgemein das zusammengesetzte, aus n Faktoren bestehende Produkt

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx) \dots (1+rx)(1+sx) = 1+C^1(n)x+C^2(n)x^2 + C^3(n)x^3 \dots + C^{n-1}(n)x^{n-1}+C^n(n)x^n$$

setzen kann, wobei $C^1(n)$ die Summe der Unionen, $C^2(n)$ die der Binionen, ... $C^{n-1}(n)$ die aller Combinationen der $(n-1)^{ten}$ und $C^n(n)$ die der n^{ten} Klasse aus den n Elementen a, b, c....r, s bezeichnet.

Denn multiplizirt man vorstehende Gleichung, dieselbe vorläufig als richtig angenommen, mit einem neuen Faktor $(1+tx)$, so erhält man

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx) \dots (1+rx)(1+sx) \times (1+tx) = \begin{cases} 1+C^1(n)x+C^2(n)x^2+C^3(n)x^3+\dots+C^n(n)x^n \\ \quad +tx+t.C^1(n)x^2+t.C^2(n)x^3+\dots+t.C^{n-1}(n)x^n+t.C^n(n)x^{n+1}. \end{cases}$$

Nun ist aber $C^1(n) = a+b+c+\dots+r+s$, also auch $C^1(n)+t = a+b+c+\dots+s+t = C^1(n+1)$, d. i. die Summe der Unionen von $(n+1)$ Elementen. Ferner ist $C^2(n)$ die Summe der Amben aus den Elementen a, b, c....s, und $t.C^1(n) = t(a+b+\dots+s)$ die Summe der durch Verbindung des Elementes t mit allen übrigen entstehenden Binionen; mithin $C^2(n)+t.C^1(n) = C^2(n+1)$, d. i.

die Summe aller Binionen aus den $(n+1)$ Elementen $a, b, c \ldots . s, t$.

Auf gleiche Weise erhält man

$$C^3(n) + t.C^2(n) = C^3(n+1),$$
$$C^4(n) + t.C^3(n) = C^4(n+1), \text{ u. s. f.}$$

Man erhält somit, wenn man $n+1=m$ setzt:

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots(1+sx)(1+tx)=1+C^1(m)x+C^2(m)x^2 + C^3(m)x^3 + \ldots C^m(m)x^m,$$

welche Gleichung mit der oben für n Faktoren angegebenen hinsichtlich des Baues völlig übereinstimmt. Es gelten also die erwähnten Entwicklungsgesetze auch für $(n+1)$ binomische Faktoren, wenn sie für n Faktoren richtig sind. Nach den anfänglich aufgestellten Gleichungen sind sie aber für $n=2, 3, 4$ giltig; also auch für $n=5$, folglich auch für $n=6$ u. s. w.; daher allgemein für jede Anzahl von Faktoren.

Setzt man endlich in der Gleichung

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots\ldots(1+sx)=1+C^1(n)x+C^2(n)x^2 + C^3(n)x^3+\ldots+C^{n-1}(n)x^{n-1}+C^n(n)x^n$$

sämmtliche Koëffizienten von x der Einheit gleich, d. i. $a=b=c = d \ldots . = s = 1$, so verwandelt sich die erste Seite in die Potenz $(1+x)^n$; ferner wird

$$C^1(n)=n;\ C^2(n)=\frac{n(n-1)}{1.2}=n_2;\ \text{ebenso } C^3(n)=n_3\ldots.,$$

und endlich $C^n(n) = n_n = 1$, und man hat daher

$$(1+x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots . + x^n.$$

Zus. 1. Nimmt man das zweite Glied des Binoms negativ, so werden auch jene Glieder, welche eine ungerade Potenz dieses Gliedes enthalten, negativ, und man erhält, je nachdem n gerade oder ungerade ist:

$$(1-x)^n = 1-nx+n_2x^2-n_3x^3+\ldots . \mp n_{n-1}x^{n-1} \pm x^n.$$

Zus. 2. Die für $(1\pm x)^n$ sich ergebende Reihe ist stets begrenzt, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Denn es muß einmal in den Binomialkoëffizienten ein Zeiger erscheinen, der größer als die Basis ist, wodurch dann sowohl dieser als auch jeder folgende Koëffizient $=0$ wird (§. 342.).

Zus. 3. Die Koëffizienten der vom ersten und letzten gleichweit abstehenden Glieder sind einander gleich. Denn ihre Zeiger sind zusammen der Basis (n) gleich.

Zus. 4. Die Koëffizienten der Potenz $(1 \pm x)^n$ steigen vom Anfange bis zur Mitte, und nehmen dann in derselben Ordnung wieder ab. Ist n gerade, so steht der größte in der Mitte, bei ungeradem Werthe von n sind zwei mittlere, welche einander gleich sind. Z. B.

$$(1 \pm x)^7 = 1 \pm 7x + 21x^2 \pm 35x^3 + 35x^4 \pm 21x^5 + 7x^6 \pm x^7 ;$$
$$(1 \pm x)^8 = 1 \pm 8x + 28x^2 \pm 56x^3 + 70x^4 \pm 56x^5 + 28x^6 \pm 8x^7 + x^8 .$$

Zus. 5. Hat man irgend eine Potenz von $1 + x$ entwickelt, so läßt sich daraus sehr leicht die nächst höhere ableiten. Es ist nämlich der Koëffizient eines jeden Gliedes der letztern gleich der Summe aus dem gleichvielten und dem ihm vorangehenden Koëffizienten der erstern. Denn multiplizirt man z. B.

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots + x^n \text{ mit}$$
$$1 + x \quad = 1 + x \text{, so erhält man}$$

$$(1+x)^{n+1} = 1 + (n+1)x + (n_2+n)x^2 + (n_3+n_2)x^3 + \ldots \text{(vgl. Zus. 4.).}$$

Zus. 6. Die Summe aller Binomialkoëffizienten der Potenz $(1 + x)^n$ ist gleich der sovielten Potenz von 2, als der Exponent n Einheiten hat, also $= 2^n$. Denn setzt man in der Formel des Lehrsatzes $x = 1$, so hat man unmittelbar

$$2^n = 1 + n + n_2 + n_3 + \ldots + n_n \text{ (vgl. §. 318, Zus. 2.).}$$

Zus. 7. In der Potenz $(1 - x)^n$ ist die Summe der Binomialkoëffizienten stets $= 0$. Denn wird in der Formel des Zus. 1. das zweite Glied des Binoms, nämlich $x = 1$ gesetzt, so folgt $\quad 0 = 1 - n + n_2 - n_3 + \ldots \mp n_{n-1} \pm n_n .$

§. 347.

Lehrs. Bezeichnet n eine ganze positive Zahl, so ist $(a \pm b)^n$ gleich einem nach fallenden Potenzen des Gliedes a von a^n bis a^0 und nach steigenden des Gliedes b von b^0 bis b^n geordneten Ausdrucke, dessen erstes Glied den Koëffizienten 1 hat, die folgenden aber Binomialkoëffizienten, deren gemeinsame Basis n ist, und deren Zeiger der Ordnung nach die Zahlen 1, 2, 3 . . . . n sind. (Binom. Lehrs.)

Thes. $(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 \pm \ldots \pm nab^{n-1} \pm b^n$.

Bew. Es ist $(a \pm b)^n = \left(a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)\right)^n = a^n\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^n$.

Setzt man $\frac{b}{a} = x$, so wird, da n eine ganze positive Zahl ist (nach §. 346.):

$$(a \pm b)^n = a^n(1 \pm x)^n = a^n(1 \pm nx + n_2x^2 \pm \ldots\ldots \pm x^n).$$

Substituirt man in diese Gleichung statt x seinen Werth, so folgt

$$(a \pm b)^n = a^n\left(1 \pm n.\frac{b}{a} + n_2.\frac{b^2}{a^2} \pm \ldots. \pm \frac{b^n}{a^n}\right)$$

$$= a^n \pm na^{n-1}b + n_2a^{n-2}b^2 \pm \ldots. \pm b^n.$$

Demnach erhält man z. B.

$$(2a-3b^2)^5 = (2a)^5 - 5.(2a)^4.3b^2 + \frac{5.4}{1.2}.(2a)^3(3b^2)^2 - \frac{5.4.3}{1.2.3}.(2a)^2(3b^2)^3$$

$$+ \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2a(3b^2)^4 - (3b^2)^5$$

$$= 32a^5 - 240a^4b^2 + 720a^3b^4 - 1080a^2b^6 + 810ab^8 - 243b^{10}.$$

Zus. 1. Wird ein Binom $(a \pm b)$ zu irgend einer Potenz erhoben, so gibt die Summe der Exponenten der beiden Glieder des Binoms in jedem Gliede der erhaltenen Reihe den gegebenen Grad (n) an, zu dem das Binom erhoben wird.

Zus. 2. Der Koëffizient eines jeden Gliedes ist das Produkt der Exponenten des ersten Gliedes (a) in allen vorhergehenden Gliedern, dividirt durch das Produkt soviele in natürlicher Ordnung auf einander folgender Zahlen, von 1 angefangen, als Glieder vorangehen. Denn es ist z. B. der Koëffizient des 4ten Gliedes

$$n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.$$

Zus. 3. Jedes Glied einer Potenz eines Binoms läßt sich auch unmittelbar bestimmen, ohne die Potenz selbst zu entwickeln. Der allgemeine Ausdruck dafür heißt das allgemeine Glied, und ist für das mte Glied von $(a \pm b)^n$:

$$G_m = n_{m-1}\,.\,a^{n-(m-1)}\,b^{m-1}\,;$$

denn der Index des Binomialkoëffizienten ist in jedem Gliede um 1 kleiner, als die Stellenzahl des Gliedes, der Exponent von b

ist ihm gleich und ergänzt den von a zum Exponenten n. Z. B. für das 6te Glied von $(a+b)^{12}$ erhält man

$$G_6 = 12_5 \,.\, a^7b^5 = \frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} a^7b^5 = 792a^7b^5 \,.$$

§. 348.

Lehrs. Die Binomialformel ist auch dann giltig, wenn der Exponent eine positive gebrochene Zahl ist.

$$\text{Thes.}\quad (1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}.x + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_3 .x^3 + \ldots.$$

Bew. Bezeichnen μ und ν beliebige ganze und positive Zahlen, so ist (nach §. 346.)

1) $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \ldots.$, ebenso

2) $(1+x)^\nu = 1 + \nu x + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 + \ldots.$

Setzt man nun die Werthe dieser Reihen der Kürze halber beziehungsweise $= F(\mu)$ und $= F(\nu)$, wobei das Zeichen F lediglich nur die Form der von μ und ν abhängigen Reihen bezeichnet, und multiplizirt beide Reihen, so folgt

$$\begin{aligned} F(\mu).F(\nu) = 1 &+ \mu x + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \ldots \\ &+ \nu x + \mu\nu x^2 + \mu_2\nu x^3 + \mu_3\nu x^4 + \ldots \\ &\qquad + \nu_2 x^2 + \mu\nu_2 x^3 + \mu_2\nu_2 x^4 + \ldots \\ &\qquad\qquad + \nu_3 x^3 + \mu\nu_3 x^4 + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + \nu_4 x^4 + \ldots \\ \hline = 1 &+ (\mu+\nu)x + (\mu+\nu)_2 x^2 + (\mu+\nu)_3 x^3 + (\mu+\nu)_4 x^4 \ldots, \end{aligned}$$

da $\mu_2 + \mu\nu + \nu_2 = (\mu+\nu)_2$ rc. ist (§. 345.).

Diese Reihe hängt nun offenbar von $\mu+\nu$ ebenso ab, wie die Reihen 1) und 2) von μ und ν; sie muß daher (da sie dieselbe Form hat) analog durch $F(\mu+\nu)$ bezeichnet werden, und es ist mithin

$$3)\quad F(\mu) \,.\, F(\nu) = F(\mu+\nu) \,.$$

Hieraus folgt, wenn $\nu = \mu$ gesetzt wird,

$$F(\mu) \,.\, F(\mu) = (F(\mu))^2 = F(2\mu) \,.$$

Ferner erhält man für $\nu = 2\mu$:

$$F(\mu).F(2\mu) = F(\mu).(F(\mu))^2 = (F(\mu))^3 = F(3\mu) \text{ rc.}$$

und, auf diese Art n mal fortfahrend, allgemein

$$(F(\mu))^n = F(n.\mu) \,.$$

Nimmt man nun statt μ einen Bruch, dessen Nenner n und dessen Zähler eine ganze Zahl m ist, so ergibt sich durch Substitution in die letztere Gleichung

$$\left(F\left(\frac{m}{n}\right)\right)^n = F(m)\text{ , und hieraus } F\left(\frac{m}{n}\right) = (F(m))^{\frac{1}{n}} .$$

Da aber m eine ganze positive Zahl ist, so hat man $F(m) = 1 + mx + m_2x^3 + m_3x^3 + \ldots = (1 + x)^m$; daher

$$(F(m))^{\frac{1}{n}} = ((1 + x)^m)^{\frac{1}{n}} = (1 + x)^{\frac{m}{n}} = F\left(\frac{m}{n}\right).$$

Nach der eingeführten Bezeichnungsweise ist aber

$$F\left(\frac{m}{n}\right) = 1 + \frac{m}{n}x + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^3 + \ldots;\text{ also auch}$$

$$(1 + x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x + \left(\frac{m}{n}\right)_2 x^2 + \left(\frac{m}{n}\right)_3 x^3 + \ldots .$$

Diese Reihe geht aber auch aus der Gleichung 1) unmittelbar hervor, wenn in derselben überall $\frac{m}{n}$ statt μ gesetzt wird; daher ist der Satz auch für einen positiven Bruchexponenten giltig.

Zus. 1. Eine Bruchpotenz eines beliebigen Binoms läßt sich auf den Lehrs. zurückführen. Denn es ist

$$\sqrt[n]{(a \pm b)^m} = (a \pm b)^{\frac{m}{n}} = \left(a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1 \pm x)^{\frac{m}{n}} ,$$

wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzt.

Zus. 2. Wird ein Binom zu einer Bruchpotenz erhoben, so erhält man eine unbegrenzte Reihe von Gliedern (es gibt kein letztes Glied). Denn es wird, da der Exponent ein Bruch ist, nie ein Binomialkoëffizient gleich 0.

§. 349.

Lehrs. Die Binomialformel hat auch dann ihre Giltigkeit, wenn der Exponent eine negative, ganze oder gebrochene Zahl ist.

Thes. $(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + (-n)_2x^2 + (-n)_3x^3 + \ldots$

Bew. Gebraucht man die im vorigen §. angenommene Bezeichnungsweise, so ist, wenn n und m irgendwelche positive Zahlen ausdrücken,

α) $(1+x)^n = F(n) = 1 + nx + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots$ und
β) $(1+x)^m = F(m) = 1 + mx + m_2x^2 + m_3x^3 + \ldots$

Hieraus folgt durch Multiplikation, wie §. 348, Gleichung 3):

$$F(n) \cdot F(m) = F(n+m) .$$

Setzt man nun $m = -n$, so ergibt sich

$$F(n) \cdot F(-n) = F(n-n) = F(0) = 1 ,$$

da nämlich $F(0) = (1+x)^0 = 1$ ist (§. 62, Zus. 2.); also wird

$$F(-n) = \frac{1}{F(n)} = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} .$$

Man erhält demnach mit Rücksicht auf die eingeführte Bezeichnungsweise

$$(1+x)^{-n} = F(-n) = 1 + (-n)x + (-n)_2x^2 + (-n)_3x^3 + \ldots.$$

Dieselbe Reihe folgt aber unmittelbar, wenn in der Gleichung α) $-n$ statt n gesetzt wird. Es gilt somit der Satz auch für jeden negativen ganzen oder gebrochenen Werth des Exponenten.

Zus. 1. Jede negative Potenz eines Binoms ist eine unendliche Reihe. Denn sie ist eigentlich ein Quotient, dessen Dividend 1 ist (§. 62, Zus. 3., dann §. 65, Zus.).

Zus. 2. Jede negative Potenz eines Binoms von der Form $(a \pm b)$ kann auf die von $(1 \pm x)$ zurückgeführt werden. Denn es ist

$$(a \pm b)^{-n} = a^{-n}\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)^{-n} = a^{-n}(1 \pm x)^{-n}, \text{ wenn } \frac{b}{a} = x$$

gesetzt wird.

§. 350.

Aufg. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes irgend eine irrationale Wurzel aus einer dekadischen Zahl zu bestimmen.

Aufl. Man setze die gegebene Zahl $N = \alpha^n \pm \beta$, d. h. zerlege dieselbe in eine Summe oder Differenz zweier Zahlen, von denen die erste eine Potenz vom Grade des Radikators ist, und verfahre dann nach §. 348, Zus. 1.

Bei diesem Verfahren wird die Binomialreihe um so schneller convergiren, d. h. dem wahren Werthe der zu suchenden Wurzel durch rasches Kleinerwerden der auf einander folgenden Glieder der Reihe sich nähern, je kleiner β gegen α^n ist. Denn es wird

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{\alpha^n \pm \beta} = \sqrt[n]{\alpha^n\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha^n}\right)} = \alpha\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Um diesen Zweck zu erreichen ist es oft vortheilhaft, die Zahl N in einen Bruch zu verwandeln (§. 90, Zus.), dessen Nenner irgend eine Potenz des n^{ten} Grades ist (z. B. 2^n, 3^n ... oder allgemein z^n), wodurch dann auch $N.z^n$ einer Potenz des n^{ten} Grades möglichst nahe gebracht wird. Z. B.

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+\tfrac{1}{4})} = 2(1+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}.$$ Nun ist aber

$$(1+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{2})_2\cdot\tfrac{1}{16} + (\tfrac{1}{2})_3\cdot\tfrac{1}{64} + (\tfrac{1}{2})_4\cdot\tfrac{1}{256} + \ldots$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{64} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{256} + \ldots \text{ oder}$$
$$= 1 + 0{\cdot}125 - 0{\cdot}0078125 + 0{\cdot}0009765 - 0{\cdot}0001526 \ldots$$

Werden diese Brüche reduzirt, so folgt

$$\sqrt{5} = 2\sqrt{1+\tfrac{1}{4}} = 2.\,1{\cdot}1180114 = 2{\cdot}2360228,$$

wobei noch die vierte Dezimale richtig ist. Eine rascher convergirende Reihe würde man erhalten, wenn man

$$\sqrt{5} = \sqrt{\tfrac{80}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{81-1} = \tfrac{9}{4}\sqrt{1-\tfrac{1}{81}}$$ setzen würde.

Werden hier außer dem ersten Gliede (1) nur 3 Glieder der Reihe entwickelt und reduzirt, so erhält man

$$\sqrt{5} = \tfrac{9}{4}\sqrt{1-\tfrac{1}{81}} = 2{\cdot}236067979,$$

welches Resultat noch die achte Dezimale richtig hat.

Zus. Zum Behufe der Ausziehung einer jeden beliebigen Wurzel aus einer Binomialgröße oder einer dekadischen Zahl hat man

$$\sqrt[n]{(1\pm x)} = (1\pm x)^{\frac{1}{n}} = 1 \pm \frac{1}{n}x + \left(\frac{1}{n}\right)_2 x^2 \pm \left(\frac{1}{n}\right)_3 x^3 + \ldots,$$

oder, wenn man die Binomialkoëffizienten aufgelöst schreibt:

$$\sqrt[n]{1\pm x} = 1 \pm \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{n.2n}x^2 \pm \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n}x^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n.4n}x^4$$
$$\pm \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{n.\,2n.\,3n.\,4n.\,5n}x^5 - \ldots$$

Hieraus ist das Gesetz der Bildung und des Fortschreitens der Werthe der Binomialkoëffizienten leicht erkenntlich, es mag n was immer für eine ganze und positive Zahl sein.

Druck von J. P. Himmer in Augsburg.

[illegible] vortheilhaft, die Reihe [illegible] anzuwenden (§. 90. Zus. 1.), [illegible] [illegible] [illegible] z. B.

[illegible]

[illegible] Werthe gewinnt, so folgt

$$\sqrt{5} = 2\sqrt{1\frac{1}{4}} = 2 . 1{\cdot}118034 = 2{\cdot}236068$$

welches Resultat [illegible] richtig ist. Eine [illegible] Annäherung würde man erhalten, wenn man

$$\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{80} = \frac{1}{4}\sqrt{(81-1)} = \frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}}$$ setzen würde.

[illegible] (1) [illegible] so erhält man

$$\sqrt{5} = \frac{9}{4}\sqrt{1-\frac{1}{81}} = 2{\cdot}2360679775,$$

welches Resultat noch für zehn Decimalen richtig ist.

§. [illegible] Zum Behufe der Ausziehung einer jeden beliebigen Wurzel [illegible] Zahl hat man

$$\sqrt[n]{1\pm x} = (1\pm x)^{\frac{1}{n}} = 1 \pm \frac{1}{n}x + \binom{\frac{1}{n}}{2}x^2 \pm \binom{\frac{1}{n}}{3}x^3 + \dots$$

oder, wenn man die Binomialcoefficienten wirklich berechnet:

$$\sqrt[n]{1\pm x} = 1 \pm \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{n.2n}x^2 \pm \frac{(n-1)(2n-1)}{n.2n.3n}x^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n.2n.3n.4n}x^4$$
$$\pm \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)}{n.2n.3n.4n.5n}x^5 - \dots$$

Hieraus ist das Gesetz der Bildung und des Fortschreitens der Werthe der Binomialcoefficienten leicht erkennbar, es muß n aber [illegible] ganze und positive Zahl sein.

[illegible]